現代三角関数論

黒川信重

岩波書店

序——三角とゼータとガンマ

三角関数は中学生時代から親しんでいる．その歴史は長く，数千年前のエジプト，バビロニア，ギリシアにおいて発展した．古代の三角関数論の記念碑と言えるものが「ピタゴラスの定理」であり，直角三角形における3辺 a, b, c の関係式

$$a^2+b^2=c^2$$

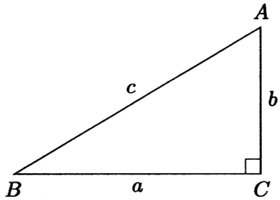


図1

である．ただし，c が斜辺の長さであり，a と b は直角をはさむ2辺である．これを斜辺が1となるように相似に変換すると，通常の三角関数の関係式

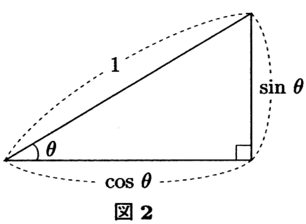


図2

$$\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$$

が得られることになる．

三角関数は

$$\sin(\theta+2\pi)=\sin\theta$$

のように周期関数である．三角関数を一般化した関数としては，2 重周期関数である楕円関数が知られている．楕円関数の研究は，18 世紀から 19 世紀はじめにかけてのオイラーやガウスの研究を経て，19 世紀に全盛期を迎え，多数の論文が書かれた．その頃の楕円関数論の様子は名著

高木貞治『近世数学史談』共立出版，1970 年 ／ 岩波文庫，1995 年

に描かれている．それは，1796 年 3 月 30 日朝の 18 歳の青年ガウスの大発見にはじまり(なお，高木は「19 歳」としているが，ガウスは 1777 年 4 月 30 日生れなので，満年齢では「18 歳」になる)，臨場感にあふれている．

高木貞治は，1920 年に類体論を樹立したことで有名である．しかも，楕円関数論の専門家でもあった．実際，類体論を証明した論文

T. Takagi, "Über eine Theorie des relativ Abel'schen Zahlkörpers", *Journal of the College of Science, Imperial University of Tokyo*, **41**, Art 9 (1920), 1-133 [高木貞治「相対アーベル数体の理論について」]

の後半において，類体論と楕円関数論を駆使して，「虚 2 次体のクロネッカー青春の夢」を解決している．ここで，「クロネッカー青春の夢」(Kronecker's Jugendtraum)とは，代数体 K(有理数体 $\mathbb{Q}$ の有限次拡大体)のすべてのアーベル拡大体(類体)を値 $F_K(K)$ によって生成するような関数 $F_K(x)$ を求める問題である．最も基本となる有理数体 $\mathbb{Q}$ の場合にはクロネッカー自身が 1853 年に $F_{\mathbb{Q}}(x)=e^{2\pi ix}$ を用いて解決して，一般の場合を「夢」として提出したのであった．高木は K が虚 2 次体，つまり負の整数 D に対して

$$K=\{a+b\sqrt{D}\mid a,b\in\mathbb{Q}\}$$

となっているもの，に対して $F_K(x)$ を楕円関数を使って構成し，解決したのである．

そこで，次に問題となるのは，K が実 2 次体，つまり平方数ではない正の整数 D に対して

$$K = \{a+b\sqrt{D} \mid a,b \in \mathbb{Q}\}$$

の場合であった．ところが，この場合には，高木の解決以来半世紀が過ぎた 1970 年になっても一向に $F_K(x)$ が見あたらなかったのである．この問題に果敢に挑戦したのが 1977 年の新谷卓郎の論文

T. Shintani, "On a Kronecker limit formula for real quadratic fields" J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, **24** (1977), 167–199［新谷卓郎「実 2 次体のクロネッカー極限公式について」］

であった．そこで使われたのが「2 重三角関数」というものであり，数学社会でも見慣れないものだった．新谷は 1980 年に 37 歳で亡くなってしまったこともあり，実 2 次体のクロネッカー青春の夢の解決には至らなかったが，確実な足跡を刻んだ．残念ながら，40 年経った現在でも解決されていない．

通常の三角関数に対しては

$$\sin(\pi x) = \pi x \prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)$$

という無限積表示が知られている．ここで，π=3.14… は円周率であり，$\sin\theta$ が $\theta=0, \pm\pi, \pm 2\pi, \cdots$ においてのみ 0 になること（θ が複素数の範囲でも）も一目でわかる形になっている．2 重三角関数は，一番単純な場合でも

$$e^x \prod_{n=1}^{\infty}\left\{\left(\frac{1-\frac{x}{n}}{1+\frac{x}{n}}\right)^n e^{2x}\right\}$$

という異様な形をしていて，1886 年にヘルダーによって発見された．また，3 重三角関数の最も簡単な場合の形は

$$e^{\frac{x^2}{2}} \prod_{n=1}^{\infty}\left\{\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)^{n^2} e^{x^2}\right\}$$

となっていて，1990 年頃に筆者が発見した．

このように，多重三角関数は，数学の歴史からすると，ごく最近に現れた関数である．

本書では，多重三角関数と応用の周辺をゆっくり紹介する．キーワードは，ゼータ関数・ガンマ関数・三角関数である．本書は3部から成っている．第Ⅰ部では多重三角関数を作るための多重ガンマ関数——それは，多重フルビッツ・ゼータ関数というものからくる——を解説し，第Ⅱ部で多重三角関数の性質を述べ，第Ⅲ部で多重三角関数からゼータ関数への応用を説明するという構成である．図示すると，

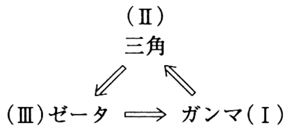


図 3

という三角形になっている．

一般化された三角関数の広野には未知の宝石がたくさん埋っていて，発掘する人を待っている．読者には，新しい三角関数の世界を楽しまれたい．

2013 年 9 月 18 日

黒川信重

目　次

第II部　多重三角関数論

第I部

▼

三角関数論への助走

第1章 階乗とガンマ関数

階乗 $n!=1\times2\times\cdots\times n$ は n が大きくなるにつれて急激に増大する．その様子は

$$n! \sim \sqrt{2\pi}n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}$$

という**スターリングの公式**に表現されている．

オイラーは，1729 年にガンマ関数を導入することによって階乗関数を整数だけでない変数へと一般化したのである．通常使われている記号では

$$n! = \Gamma(n+1)$$

となっていて，$\mathrm{Re}(x)>0$ なら

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}dt$$

という積分によってガンマ関数 $\Gamma(x)$ は定義される．なお，$\Gamma(x)$ という記号はオイラーは使っていなかったことに注意しておきたい．オイラーは $n!=[n]$ を拡張して

$$[x]\,(=\Gamma(x+1)) = \int_0^\infty e^{-t}t^x dt$$

という関数を使用して

$$\left[\frac{1}{2}\right] = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

などを計算している．

この章では，スターリングの公式，ガンマ関数の性質，また，ガンマ関数と三角関数との関係を見ていこう．

1.1　スターリングの公式

本節では，スターリングの公式を

黒川信重「Stirling の公式の初等的証明」『数学セミナー』

1972 年 6 月号，72 ページ，NOTE

に沿って証明しておこう．

まず，2 つの補題を用意する．

補題 1　$f(x)$ は $[0,1]$ 上の C^1 級関数（$f'(x)$ が存在して連続）とすると

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) - n\int_0^1 f(x)dx\right\} = \frac{f(1)-f(0)}{2}$$

が成立する．□

［証明］　$k=1,\cdots,n$ に対して，区間 $\left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right]$ における $f'(x)$ の最小値を m_k, 最大値を M_k とすると，その区間の x について

$$\int_x^{\frac{k}{n}} m_k dt \leqq \int_x^{\frac{k}{n}} f'(t)dt \leqq \int_x^{\frac{k}{n}} M_k dt$$

つまり

$$m_k\left(\frac{k}{n}-x\right) \leqq f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x) \leqq M_k\left(\frac{k}{n}-x\right)$$

となる．したがって

$$\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} m_k\left(\frac{k}{n}-x\right)dx \leqq \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}\left(f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right)dx$$
$$\leqq \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} M_k\left(\frac{k}{n}-x\right)dx$$

より

$$\frac{m_k}{2n^2} \leqq \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} \left(f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right) dx \leqq \frac{M_k}{2n^2}.$$

これを $k=1,\cdots,n$ で足して n 倍すると

$$\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n} m_k \leqq n\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} \left(f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right) dx \leqq \frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n} M_k.$$

したがって,

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} m_k \leqq \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)-n\int_0^1 f(x)dx \leqq \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} M_k.$$

ここで,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} m_k = \int_0^1 f'(x)dx = f(1)-f(0),$$
$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} M_k = \int_0^1 f'(x)dx = f(1)-f(0)$$

だから

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)-n\int_0^1 f(x)dx\right\} = \frac{f(1)-f(0)}{2}$$

を得る.　[証明終]

補題 2　(ワリスの公式)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\cdot\frac{2\cdot 4\cdot\cdots\cdot(2n)}{1\cdot 3\cdot\cdots\cdot(2n-1)} = \sqrt{\pi}.$$

□

[証明]

$$I(n) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n\theta d\theta$$

を考える.

$$I(0) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta = \frac{\pi}{2},$$

$$I(1)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta d\theta=[-\cos\theta]_0^{\frac{\pi}{2}}=1$$

であり，$n \geqq 2$ のときは，部分積分により

$$\begin{aligned}I(n)&=[-\cos\theta\cdot\sin^{n-1}\theta]_0^{\frac{\pi}{2}}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\cdot(n-1)\sin^{n-2}\theta\cdot\cos\theta d\theta\\&=(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-2}\theta(1-\sin^2\theta)d\theta\\&=(n-1)I(n-2)-(n-1)I(n)\end{aligned}$$

となる．したがって，漸化式

$$I(n)=\frac{n-1}{n}I(n-2)$$

が成立し，$n=1,2,3,\cdots$ に対して

$$\begin{aligned}I(2n-1)&=\frac{2n-2}{2n-1}I(2n-3)\\&=\frac{2n-2}{2n-1}\cdot\cdots\cdot\frac{2}{3}\cdot I(1)\\&=\frac{(2n-2)(2n-4)\cdot\cdots\cdot 2}{(2n-1)(2n-3)\cdot\cdots\cdot 3},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}I(2n)&=\frac{2n-1}{2n}I(2n-2)\\&=\frac{2n-1}{2n}\cdot\cdots\cdot\frac{1}{2}\cdot I(0)\\&=\frac{(2n-1)(2n-3)\cdot\cdots\cdot 1}{(2n)(2n-2)\cdot\cdots\cdot 2}\cdot\frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

と求まる．ここで，$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ において

$$\sin^{2n-1}\theta>\sin^{2n}\theta>\sin^{2n+1}\theta>0$$

となることから

$$I(2n-1)>I(2n)>I(2n+1)>0$$

を得る．よって

$$\frac{I(2n-1)}{I(2n+1)}>\frac{I(2n)}{I(2n+1)}>1$$

となる．ここで，漸化式

$$I(2n+1)=\frac{2n}{2n+1}I(2n-1)$$

と

$$\frac{I(2n)}{I(2n+1)}=\left(\frac{(2n-1)(2n-3)\cdot\cdots\cdot 1}{(2n)(2n-2)\cdot\cdots\cdot 2}\right)^2\cdot\left(n-\frac{1}{2}\right)\pi$$

となることから

$$1+\frac{1}{2n}>\left(\frac{(2n-1)(2n-3)\cdot\cdots\cdot 1}{(2n)(2n-2)\cdot\cdots\cdot 2}\right)^2\left(n-\frac{1}{2}\right)\pi>1$$

つまり

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sqrt{\frac{n+\frac{1}{2}}{n-\frac{1}{2}}}>\frac{(2n-1)(2n-3)\cdot\cdots\cdot 1}{(2n)(2n-2)\cdot\cdots\cdot 2}\sqrt{n}>\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sqrt{1-\frac{1}{2n}}$$

が $n=1,2,3,\cdots$ に対して成立することがわかる．したがって

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(2n-1)(2n-3)\cdot\cdots\cdot 1}{(2n)(2n-2)\cdot\cdots\cdot 2}\sqrt{n}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}$$

となる．　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　[証明終]

スターリングの公式の証明

補題1において，$f(x)=\log(1+x)$ とすると，

$$\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)=\log\left(\frac{(2n)!}{n!n^n}\right),$$

$$\int_0^1 f(x)dx=[(1+x)\log(1+x)-x]_0^1=\log\left(\frac{4}{e}\right)$$

となるので，

$$\lim_{n\to\infty}\log\left(\frac{(2n)!}{n!n^n}\cdot\left(\frac{e}{4}\right)^n\right)=\frac{\log 2}{2}$$

を得る．つまり，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(2n)!}{4^n n!}\left(\frac{e}{n}\right)^n=\sqrt{2}$$

ということになる．一方，補題2のワリスの公式は

$$\lim_{n\to\infty}\frac{4^n(n!)^2}{\sqrt{n}\,(2n)!}=\sqrt{\pi}$$

と書き直すことができる．したがって，

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}}&=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n)!}{4^n n!}\left(\frac{e}{n}\right)^n\cdot\frac{4^n(n!)^2}{\sqrt{n}\,(2n)!}\\&=\sqrt{2}\cdot\sqrt{\pi}\\&=\sqrt{2\pi}\end{aligned}$$

というスターリングの公式が証明された． ［証明終］

スターリングの公式に対しては，第2章§2.4において，ゼータ正規化積

$$\prod_{n=1}^{\infty}n=\sqrt{2\pi}$$

という解釈を与えることができることを述べる．また，多重ガンマ関数に対するスターリング保型形式という発展にも重要な基礎となっている(第3章§3.4)．

1.2 ワリスの公式と三角関数の特殊値

ワリスの公式が，三角関数のある特殊値が簡明になっていることと同値であることを注意しておこう．

定理 1.2.1 ワリスの公式は $\sin\dfrac{\pi}{2}=1$ と同値である． ▯

［証明］ $\sin x$ の無限積表示

$$\sin x=x\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{n^2\pi^2}\right)$$

を用いる(§4.1参照)と，

$$\sin\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{4n^2}\right)$$

となる．

ここで，

$$\prod_{n=1}^{N}\left(1-\frac{1}{4n^2}\right)=\prod_{n=1}^{N}\frac{(2n-1)(2n+1)}{(2n)^2}=\frac{1\cdot3^2\cdot5^2\cdot\cdots\cdot(2N-1)^2(2N+1)}{(2\cdot4\cdot\cdots\cdot(2N))^2}$$
$$=\left(\frac{1\cdot3\cdot\cdots\cdot(2N-1)}{2\cdot4\cdot\cdots\cdot(2N)}\right)^2\cdot(2N+1)$$

であるので

$$\sin\frac{\pi}{2}=1 \iff \lim_{N\to\infty}\left(\frac{1\cdot3\cdot\cdots\cdot(2N-1)}{2\cdot4\cdot\cdots\cdot(2N)}\right)^2\cdot(2N+1)=\frac{2}{\pi}$$
$$\iff \lim_{N\to\infty}\frac{1\cdot3\cdot\cdots\cdot(2N-1)}{2\cdot4\cdot\cdots\cdot(2N)}\cdot\sqrt{N}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}$$

となって，ワリスの公式との同値性がわかる．　[証明終]

このように，誰でも知っている値 $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$ という式がワリスの公式という一見関係なさそうなものと同値になっているというのは意外なことである．なお，三角関数の無限積表示およびその一般化は本書を通じて中心的なテーマとなっている．

1.3　ガンマ関数

ガンマ関数は，$\mathrm{Re}(x)>0$ となる複素数に対しては積分

$$\Gamma(x)=\int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}dt$$

によって導入される．これを，すべての複素数に解析接続するには，部分積分

$$\Gamma(x+1)=\int_0^\infty e^{-t}t^{x}dt$$
$$=\left[-e^{-t}t^x\right]_0^\infty+x\int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}dt$$
$$=x\Gamma(x)$$

によって得られる漸化式

$$\Gamma(x) = \frac{1}{x}\Gamma(x+1)$$

によって，すべての複素数へと解析接続すればよい．たとえば，

$$\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right) = -2\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = -2\pi^{\frac{1}{2}},$$
$$\Gamma\left(-\frac{3}{2}\right) = -\frac{2}{3}\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{4}{3}\pi^{\frac{1}{2}}$$

などと値を求めることができる．

ここで用いた値

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \pi^{\frac{1}{2}}$$

は積分値

$$I = \int_0^\infty e^{-t}t^{-\frac{1}{2}}\,dt = \pi^{\frac{1}{2}}$$

に他ならない．これはガウス積分と呼ばれる大切な定積分であるので，計算法を振り返っておこう．まず，ガウス積分は，$t=u^2$ と積分変数を置き換えることによって

$$I = 2\int_0^\infty e^{-u^2}\,du$$

となる．これは，2 変数の積分を次のように用いることで求めることができる．いま

$$\begin{aligned} I^2 &= 4\left(\int_0^\infty e^{-x^2}dx\right)\left(\int_0^\infty e^{-y^2}dy\right) \\ &= 4\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-x^2-y^2}dxdy \end{aligned}$$

を考える．そこで，積分を極座標

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \qquad \left(r \geqq 0;\ 0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}\right)$$

によって表示すると

$$\begin{aligned} I^2 &= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{\infty} re^{-r^2}dr\right) d\theta \\ &= \pi \end{aligned}$$

となる．したがって，

$$I = \sqrt{\pi}$$

と求まった．

ガンマ関数の無限積表示

$$\Gamma(x) = \frac{1}{x}e^{-\gamma x}\prod_{n=1}^{\infty}\left\{\left(1+\frac{x}{n}\right)^{-1}e^{\frac{x}{n}}\right\}$$

は有用な式であり，しばしば活用される．これによると，すべての複素数 x に対する解析接続が一挙に与えられている．ここで，

$$\begin{aligned} \gamma &= \lim_{n\to\infty}\left\{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\log n\right\} \\ &= 0.577\cdots \end{aligned}$$

はオイラー定数である．この無限積表示から明らかなように $\Gamma(x)$ は全複素平面で有理型関数となり，極は $x=0, -1, -2, -3, \cdots$ における1位の極のみであり，零点は存在しない．

1.4　ガンマ関数から三角関数へ

ガンマ関数 $\Gamma(x)$ と三角関数 $\sin x$ との意外な関係はオイラーが発見した：

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin(\pi x)}.$$

これは，三角関数が2つのガンマ関数の積に分解するということを意味している．

たとえば，ここで $x=\dfrac{1}{2}$ とおいてみると

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{\pi}{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}$$

となり，ワリスの公式と同値であった $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$ という式は $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$ という式と同値になっていることがわかる：

$$\text{ワリスの公式} \underset{\S 1.2}{\Longleftrightarrow} \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \Longleftrightarrow \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

上記のオイラーの公式を見るには，無限積表示

$$\Gamma(x) = x^{-1}e^{-\gamma x}\prod_{n=1}^{\infty}\left\{\left(1+\frac{x}{n}\right)^{-1}e^{\frac{x}{n}}\right\},$$

$$\begin{aligned}\Gamma(1-x) &= (-x)\Gamma(-x)\\ &= e^{\gamma x}\prod_{n=1}^{\infty}\left\{\left(1-\frac{x}{n}\right)^{-1}e^{-\frac{x}{n}}\right\}\end{aligned}$$

を用いるのが手早であり，これらの式から，

$$\begin{aligned}\Gamma(x)\Gamma(1-x) &= x^{-1}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)^{-1}\\ &= \frac{\pi}{\sin(\pi x)}\end{aligned}$$

と得られる．ここで，$\sin x$ の無限積表示

$$\sin x = x\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{n^2\pi^2}\right)$$

を用いている．

さて，ワリスの公式が $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$ と同値であると上に述べたが，このことの，より直接的な解釈は

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2e^{-\frac{\gamma}{2}}\prod_{n=1}^{\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{-1}e^{\frac{1}{2n}}\right\}$$

を計算することによって得られる．実際，

$$2e^{-\frac{\gamma}{2}}\prod_{n=1}^{N}\left\{\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{-1}e^{\frac{1}{2n}}\right\}$$
$$=2e^{-\frac{\gamma}{2}+\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{N}\right)}\cdot\frac{2\cdot4\cdot\cdots\cdot(2N)}{3\cdot5\cdot\cdots\cdot(2N+1)}$$
$$=\frac{2N}{2N+1}e^{\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{N}-\log N\right)-\frac{\gamma}{2}}\cdot\frac{2\cdot4\cdot\cdots\cdot(2N)}{1\cdot3\cdot\cdots\cdot(2N-1)}\cdot\frac{1}{\sqrt{N}}$$

となるので

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\lim_{N\to\infty}\frac{2\cdot4\cdot\cdots\cdot(2N)}{1\cdot3\cdot\cdots\cdot(2N-1)}\cdot\frac{1}{\sqrt{N}}$$

という表示が成立している．よって，ワリスの公式と $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$ とは同値であることが改めて確認された．なお，一般の複素数 x に対して

$$\Gamma(x)=\lim_{N\to\infty}\frac{N!N^x}{x(x+1)\cdots(x+N)}$$

という表示が成り立つことも同様にしてわかる．

なぜならば，

$$\frac{N!N^x}{x(x+1)\cdots(x+N)}=\frac{1}{x}\cdot e^{-\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{N}-\log N\right)x}\cdot\prod_{n=1}^{N}\left\{\left(1+\frac{x}{n}\right)^{-1}e^{\frac{x}{n}}\right\}$$

より

$$\lim_{N\to\infty}\frac{N!N^x}{x(x+1)\cdots(x+N)}=\frac{1}{x}e^{-\gamma x}\prod_{n=1}^{\infty}\left\{\left(1+\frac{x}{n}\right)^{-1}e^{\frac{x}{n}}\right\}$$
$$=\Gamma(x)$$

となるからである．このようにガンマ関数には多様な表わし方があって，それぞれに活躍している．

第2章
レルヒの公式

レルヒの公式とは，フルビッツ・ゼータ関数の $s=0$ における微分とガンマ関数を結びつける公式である．第3章に述べる通り，多重ガンマ関数を構成する際には，レルヒの公式をヒントとして，多重化することになる．

定理 2.0.1（レルヒ，1894年）

$$\exp\left(\frac{\partial}{\partial s}\zeta(s,x)\Big|_{s=0}\right)=\frac{\Gamma(x)}{\sqrt{2\pi}}.$$

□

ここで，

$$\zeta(s,x)=\sum_{n=0}^{\infty}(n+x)^{-s}$$

はフルビッツ・ゼータ関数である．レルヒの公式は，**ゼータ正規化積**とも深く関係しているので，そこから説明する．

2.1　ゼータ正規化積

本節では，本書の基礎となるゼータ正規化積を研究する．

ゼータ正規化積とは，数列 $\Lambda=\{\lambda_n\,|\,n=1,2,3,\cdots\}$ の正規化された積のことであり，ゼータ関数

$$\zeta_\Lambda(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{-s}$$

を用いて

$$\prod_{n=1}^{\infty} \lambda_n = \exp(-\zeta'_\Lambda(0))$$

と定義される．ただし，$\zeta_\Lambda(s)$ は $s{=}0$ において正則に解析接続されるものとする．また，$\zeta'_\Lambda(s)$ は変数 s についての微分を表わす．

ゼータ正規化積の代表的なものは次の結果である．

定理 2.1.1（リーマン）

$$\prod_{n=1}^{\infty} n = \sqrt{2\pi}.$$

□

これは，基本的にはリーマンが求めていたことであり，リーマン・ゼータ関数

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$$

に対する表示

$$\zeta'(0) = -\frac{1}{2}\log(2\pi)$$

を述べている．

また，レルヒの公式は，次の形に言い換えることができる．

定理 2.1.2

$$\prod_{n=0}^{\infty} (n{+}x) = \frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma(x)}.$$

□

ここで，$x{=}1$ とおいたものがリーマンの結果になっている．

ゼータ正規化積は保型形式に対するクロネッカーの極限公式とも結びついている．また，正規行列式表示

$$\det(D+x) = \frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma(x)}$$

ともなる．ここで，$D:\mathbb{C}[t]\longrightarrow\mathbb{C}[t]$ は $D=t\dfrac{d}{dt}$ という微分作用素である．詳しくは

黒川信重・栗原将人・斎藤毅『数論 II』岩波書店，2005 年

の第 9 章「保型形式とは」を参照されたい．

2.2　フルビッツ・ゼータ関数の解析接続

フルビッツ・ゼータ関数

$$\zeta(s,x) = \sum_{n=0}^{\infty}(n+x)^{-s}$$

は $\mathrm{Re}(s)>1$ において絶対収束(さらに，局所一様収束)していて，そこにおいて正則な関数になっている．これを $\mathrm{Re}(s)\leqq 1$ へと解析接続するには，いくつかの方法が知られているが，ここでは，ガンマ関数を用いた積分表示を使って示そう．

この方法の歴史は，オイラー(1769 年；全集 I-15，p.112)によって積分表示が発見され，リーマン(1859 年)によって解析接続が行われた．なお，2 人とも

$$\zeta(s) = \zeta(s,1) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$$

というリーマン・ゼータ関数の場合を扱っていた．

まず，$\mathrm{Re}(s)>1$ に対して

$$\zeta(s,x) = \frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^{\infty}\frac{e^{-xt}t^{s-1}}{1-e^{-t}}dt$$

となることを示そう(話を簡単にするため，$x>0$ としておこう)．そのためには

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty}\frac{e^{-xt}t^{s-1}}{1-e^{-t}}dt &= \int_0^{\infty}\left(\sum_{n=0}^{\infty}e^{-nt}\right)e^{-xt}t^{s-1}dt \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^{\infty}e^{-(n+x)t}t^{s-1}dt\end{aligned}$$

$$= \Gamma(s)\sum_{n=0}^{\infty}(n+x)^{-s}$$

と変形すればよい．ただし，$\lambda>0$ に対して

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty} e^{-\lambda t}t^{s-1}dt &= \lambda^{-s}\int_0^{\infty} e^{-\lambda t}(\lambda t)^s \frac{dt}{t}\\ &= \lambda^{-s}\int_0^{\infty} e^{-u}u^s\frac{du}{u} \qquad (\lambda t{=}u \text{ とおきかえた})\\ &= \lambda^{-s}\Gamma(s)\end{aligned}$$

となることを使っている．

なお，ここまでの話は，より一般に

$$Z(s) = \sum_{\lambda\in\Lambda} c(\lambda)\lambda^{-s}$$

の場合でも同様であり，適当な収束性の下に，

$$\varphi(t) = \sum_{\lambda} c(\lambda)e^{-\lambda t}$$

によって

$$Z(s) = \frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^{\infty}\varphi(t)t^{s-1}dt$$

という積分表示ができる．

さて，積分表示

$$\Gamma(s)\zeta(s,x) = \int_0^{\infty}\varphi(t,x)t^{s-1}dt,$$
$$\varphi(t,x) = \frac{e^{-xt}}{1-e^{-t}}$$

から，$\mathrm{Re}(s)\leqq 1$ への解析接続を行うには，$\varphi(t,x)$ の $t=0$ におけるローラン展開

$$\varphi(t,x) = \sum_{n=-1}^{\infty} a_n(x)t^n$$

を用いる．ここで，

$$a_{-1}(x) = 1,$$

$$a_0(x) = \frac{1}{2} - x,$$
$$a_1(x) = \frac{1}{12} - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{2},$$
$$\vdots$$

となる．計算は

$$\begin{aligned}
\varphi(t,x) &= \frac{1 - xt + \frac{x^2}{2}t^2 + \cdots}{1 - \left(1 - t + \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{6}t^3 + \cdots\right)} \\
&= \frac{1 - xt + \frac{x^2}{2}t^2 + \cdots}{t\left\{1 - \left(\frac{1}{2}t - \frac{1}{6}t^2 + \cdots\right)\right\}} \\
&= \frac{1}{t}\left(1 - xt + \frac{x^2}{2}t^2 + \cdots\right)\left\{1 + \left(\frac{1}{2}t - \frac{1}{6}t^2 + \cdots\right)\right. \\
&\qquad \left. + \left(\frac{1}{2}t - \frac{1}{6}t^2 + \cdots\right)^2 + \cdots\right\} \\
&= \frac{1}{t}\left(1 - xt + \frac{x^2}{2}t^2 + \cdots\right)\left(1 + \frac{1}{2}t + \frac{1}{12}t^2 + \cdots\right) \\
&= \frac{1}{t}\left\{1 + \left(\frac{1}{2} - x\right)t + \left(\frac{1}{12} - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{2}\right)t^2 + \cdots\right\} \\
&= \frac{1}{t} + \left(\frac{1}{2} - x\right) + \left(\frac{1}{12} - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{2}\right)t + \cdots
\end{aligned}$$

のように行えばよい．一般に，$a_n(x)$ は x の $n+1$ 次多項式となる．

解析接続の手始めに，領域 $-2<\mathrm{Re}(s)\leqq 1$ の場合を考えよう．そのために

$$\begin{aligned}
\Gamma(x)\zeta(s,x) &= A(s) + B_1(s) + C_1(s), \\
A(s) &= \int_1^\infty \varphi(t,x)t^{s-1}dt, \\
B_1(s) &= \int_0^1 (a_{-1}(x)t^{-1} + a_0(x) + a_1(x)t)t^{s-1}dt, \\
C_1(s) &= \int_0^1 \{\varphi(t,x) - (a_{-1}(x)t^{-1} + a_0(x) + a_1(x)t)\}t^{s-1}dt
\end{aligned}$$

と分解する．ここで，$t \to \infty$ に対して $\varphi(t,x)$ は指数関数的に減少することから，$A(s)$ はすべての複素数 s に対して絶対収束して正則な関数となることがわかる．また，$B_1(s)$ は有限項の簡単な積分であり

$$\begin{aligned} B_1(s) &= \frac{a_{-1}(x)}{s-1}+\frac{a_0(x)}{s}+\frac{a_1(x)}{s+1} \\ &= \frac{1}{s-1}+\left(\frac{1}{2}-x\right)\frac{1}{s}+\left(\frac{1}{12}-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{2}\right)\frac{1}{s+1} \end{aligned}$$

という s の有理関数となり，これも全平面で有理型関数となっている．最後に，$C_1(s)$ については，$t \to 0$ に対して

$$\varphi(t,x)-(a_{-1}(x)t^{-1}+a_0(x)+a_1(x)t) = O(t^2)$$

という評価を用いると，$C_1(s)$ は $\mathrm{Re}(s)>-2$ において正則なことがわかる．

このようにして

$$\Gamma(s)\zeta(s,x) = A(s)+B_1(s)+C_1(s)$$

は $\mathrm{Re}(s)>-2$ において，有理型関数として解析接続された．さらに，

$$\zeta(s,x) = \frac{A(s)}{\Gamma(s)}+\frac{B_1(s)}{\Gamma(s)}+\frac{C_1(s)}{\Gamma(s)}$$

の表示において，$\dfrac{1}{\Gamma(s)}$ が正則関数であることから，$\zeta(s,x)$ は $\mathrm{Re}(s)>-2$ において有理型関数となる．とくに，$s=1,0,-1$ という整数における様子を見ると，$\zeta(s,x)$ は $s=1$ において1位の極をもち，その留数は $a_{-1}(x)=1$ であり，$s=0,-1$ においては正則であって

$$\begin{aligned} \zeta(0,x) &= a_0(x) = \frac{1}{2}-x, \\ \zeta(-1,x) &= -a_1(x) = -\frac{1}{12}+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{2} \end{aligned}$$

となることが見てとれる．ただし，

$$\left.\frac{1}{s\Gamma(s)}\right|_{s=0} = 1, \quad \left.\frac{1}{(s+1)\Gamma(s)}\right|_{s=-1} = -1$$

を用いた．ここで $x=1$ とおくと，$\zeta(s)$ は $s=1$ で留数1の1位の極をも

ち，

$$\zeta(0) = -\frac{1}{2}, \quad \zeta(-1) = -\frac{1}{12}$$

という特殊値をもつことがわかる．

ここまでは，$\mathrm{Re}(s)>-2$ において考えてきたが，自然数 N に対して

$$\begin{aligned}\Gamma(s)\zeta(s,x) &= A(s)+B_N(s)+C_N(s),\\ A(s) &= \int_1^\infty \varphi(t,x)t^{s-1}dt,\\ B_N(s) &= \int_0^1 \left(\sum_{n=-1}^{N} a_n(x)t^n\right) t^{s-1}dt,\\ C_N(s) &= \int_0^1 \left(\varphi(t,x)-\sum_{n=-1}^{N} a_n(x)t^n\right) t^{s-1}dt\end{aligned}$$

と分解しておけば，$A(s)$ は全平面の正則関数，

$$B_N(s) = \sum_{n=-1}^{N} \frac{a_n(x)}{s+n}$$

は有理関数，$C_N(s)$ は $\mathrm{Re}(s)>-N-1$ における正則関数となることがわかる．したがって，$\zeta(s,x)$ は $\mathrm{Re}(s)>-N-1$ において有理型に解析接続された．ここで，N は任意の自然数であるから $\zeta(s,x)$ がすべての複素数 s に対して有理型関数であることが証明された．

また，$n=0,-1,-2,\cdots$ において

$$\zeta(-n,x) = (-1)^n n! a_n(x)$$

となることがわかる．それは，$N>n$ に対して

$$\zeta(-n,x) = \left.\frac{A(s)}{\Gamma(s)}\right|_{s=-n} + \left.\frac{B_N(s)}{\Gamma(s)}\right|_{s=-n} + \left.\frac{C_N(s)}{\Gamma(s)}\right|_{s=-n}$$

となっているが，

$$\begin{aligned}&\left.\frac{A(s)}{\Gamma(s)}\right|_{s=-n} = 0,\\ &\left.\frac{B_N(s)}{\Gamma(s)}\right|_{s=-n} = \left.\frac{a_n(x)}{(s+n)\Gamma(s)}\right|_{s=-n} = (-1)^n n! a_n(x),\end{aligned}$$

$$\left.\frac{C_N(s)}{\Gamma(s)}\right|_{s=-n}=0$$

となるからである．ここで，

$$\begin{aligned}\left.\frac{1}{(s+n)\Gamma(s)}\right|_{s=-n} &= \left.\frac{(s+n-1)\cdots s}{(s+n)(s+n-1)\cdots s\Gamma(s)}\right|_{s=-n} \\ &= \left.\frac{(s+n-1)\cdots s}{\Gamma(s+n+1)}\right|_{s=-n} \\ &= \frac{(-1)\cdots(-n)}{\Gamma(1)} \\ &= (-1)^n n!\end{aligned}$$

であることを用いた．

注意 1　以上の証明から

$$Z(s)=\sum_{\lambda\in\Lambda}c(\lambda)\lambda^{-s}$$

の場合にも，$\varphi(t)=\sum_{\lambda}c(\lambda)e^{-\lambda t}$ を用いた積分表示

$$\begin{aligned}Z(s) &= \frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^\infty \varphi(t)t^{s-1}dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(s)}\int_1^\infty \varphi(t)t^{s-1}dt+\frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^1 \varphi(t)t^{s-1}dt\end{aligned}$$

において，$t\to+\infty$ における $\varphi(t)$ の急減少性(これは見やすい)と $t\to 0$ における $\varphi(t)$ の漸近展開がわかれば，$Z(s)$ を全平面に解析接続できることがわかる．とくに，

$$\begin{aligned}Z(s) &= \sum_{0<\lambda_1<\lambda_2<\cdots\uparrow\infty} c(\lambda_n)\lambda_n^{-s}, \\ \varphi(t) &= \sum_{\lambda}c(\lambda)e^{-\lambda t}\end{aligned}$$

において

$$\varphi(t)\underset{t\downarrow 0}{\sim}\sum_{\alpha}a(\alpha)t^{\alpha}$$

とすると，$Z(s)$ は全平面で有理型関数であり，

$$Z(-n)=(-1)^n n!a(n)$$

が $n=0,1,2,\cdots$ に対して成立することが導かれる.

注意 2 通常はベルヌイ多項式 $B_n(x)$ をテイラー展開の係数として

$$\frac{te^{xt}}{e^t-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n(x)}{n!} t^n$$

として定義し，ベルヌイ数 B_n を $B_n(0)$ とおく．つまり，ベルヌイ数はテイラー展開

$$\frac{t}{e^t-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} t^n$$

によって定義する．このとき

$$\begin{aligned}\varphi(t,x) &= \frac{e^{-xt}}{1-e^{-t}} \\ &= \frac{1}{t} \cdot \frac{te^{(1-x)t}}{e^t-1} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n(1-x)}{n!} t^{n-1}\end{aligned}$$

となっているので，$n=0,1,2,\cdots$ に対して

$$a_{n-1}(x) = \frac{B_n(1-x)}{n!}$$

となる．したがって，$n=1,2,3,\cdots$ に対して

$$\begin{aligned}\zeta(1-n,x) &= (-1)^{n-1}(n-1)!a_{n-1}(x) \\ &= (-1)^{n-1} \cdot \frac{B_n(1-x)}{n}\end{aligned}$$

が成立する．とくに，$x=1$ とすると

$$\zeta(1-n) = (-1)^{n-1} \cdot \frac{B_n}{n}$$

となる．ベルヌイ数の具体例

$$\begin{aligned}&B_0 = 1, \quad B_1 = -\frac{1}{2}, \quad B_2 = \frac{1}{6}, \quad B_3 = 0, \quad B_4 = -\frac{1}{30}, \\ &B_5 = 0, \quad B_6 = \frac{1}{42}, \quad B_7 = 0, \quad B_8 = -\frac{1}{30}, \quad B_9 = 0, \\ &B_{10} = \frac{5}{66}, \quad B_{11} = 0, \quad B_{12} = -\frac{691}{2730}, \cdots\end{aligned}$$

を用いると

$$\zeta(0)=-\frac{1}{2},\quad \zeta(-1)=-\frac{1}{12},\quad \zeta(-2)=0,\quad \zeta(-3)=\frac{1}{120},$$
$$\zeta(-4)=0,\quad \zeta(-5)=-\frac{1}{252},\quad \zeta(-6)=0,\quad \zeta(-7)=\frac{1}{240},$$
$$\zeta(-8)=0,\quad \zeta(-9)=-\frac{1}{132},\quad \zeta(-10)=0,\quad \zeta(-11)=\frac{691}{32760},\cdots$$

と求まる．

2.3 レルヒの公式の証明

レルヒの公式は

$$\frac{\partial}{\partial s}\zeta(s,x)\bigg|_{s=0}=\log\left(\frac{\Gamma(x)}{\sqrt{2\pi}}\right)$$

を示すことになるが，このことは，

$$\zeta(0,x)=\frac{1}{2}-x$$

を思い起こすと，$\zeta(s,x)$ の $s=0$ におけるテイラー展開が

$$\zeta(s,x)=\left(\frac{1}{2}-x\right)+s\cdot\log\left(\frac{\Gamma(x)}{\sqrt{2\pi}}\right)+(s^2\text{以上の項})$$

ということを意味している．

次の問題は有名な未解決問題であり，研究に挑戦されたい．

未解決問題 s^2 以上の項の係数を求めること．

さて，レルヒの公式

$$\frac{\partial}{\partial s}\zeta(s,x)\bigg|_{s=0}=\log\frac{\Gamma(x)}{\sqrt{2\pi}}$$

の証明を始めよう．そのために，

$$f(x)=\frac{\partial}{\partial s}\zeta(s,x)\bigg|_{s=0}-\log\Gamma(x)$$

とおいて，

$$f(x) = -\frac{1}{2}\log(2\pi)$$

となることを示す．証明は次の 3 段階で行う．

(1)　$f''(x)=0$ を示す．したがって，$f(x)=ax+b$ (a, b は定数) の形となる．

(2)　$f(x+1)=f(x)$ を示す．これから $a=0$ がわかり $f(x)=b$ となる．

(3)　$f\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{2}\log(2\pi)$ を示す．これにより，$f(x)=-\frac{1}{2}\log(2\pi)$ がわかる．

(1)の証明　$f(x)$ を x について 2 回微分すると

$$f''(x) = \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial s}\zeta(s,x)\bigg|_{s=0} - \frac{d^2}{dx^2}\log\Gamma(x)$$

である．ここで

$$\zeta(s,x) = \sum_{n=0}^{\infty}(n+x)^{-s}$$

を x で微分すると

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}\zeta(s,x) &= -s\sum_{n=0}^{\infty}(n+x)^{-s-1}\\ &= -s\zeta(s+1,x),\\ \frac{\partial^2}{\partial x^2}\zeta(s,x) &= s(s+1)\sum_{n=0}^{\infty}(n+x)^{-s-2}\\ &= s(s+1)\zeta(s+2,x)\end{aligned}$$

となる．これを s で微分して $s=0$ とすると

$$\begin{aligned}\frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial s}\zeta(s,x)\bigg|_{s=0} &= \zeta(2,x)\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}(n+x)^{-2}\end{aligned}$$

となる．一方，

$$\frac{1}{\Gamma(x)} = xe^{\gamma x}\prod_{n=1}^{\infty}\left\{\left(1+\frac{x}{n}\right)e^{-\frac{x}{n}}\right\}$$

であったから

$$-\log \Gamma(x) = \log x + \gamma x + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \log\left(1+\frac{x}{n}\right) - \frac{x}{n} \right\}$$

を得る．よって，x で微分すると

$$-\frac{d}{dx}\log \Gamma(x) = \frac{1}{x} + \gamma + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n+x} - \frac{1}{n}\right),$$

$$\begin{aligned} -\frac{d^2}{dx^2}\log \Gamma(x) &= -\frac{1}{x^2} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+x)^2} \\ &= -\sum_{n=0}^{\infty}(n+x)^{-2} \\ &= -\zeta(2,x) \end{aligned}$$

となる．したがって

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial s}\zeta(s,x)\bigg|_{s=0} - \frac{d^2}{dx^2}\log \Gamma(x) \\ &= \zeta(2,x) - \zeta(2,x) \\ &= 0 \end{aligned}$$

となって(1)が示された．

(2)の証明

$$f(x+1) = \frac{\partial}{\partial s}\zeta(s,x+1)\bigg|_{s=0} - \log \Gamma(x+1)$$

において

$$\begin{aligned} \zeta(s,x+1) &= \sum_{n=0}^{\infty}(n+x+1)^{-s} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}(n+x)^{-s} \\ &= \zeta(s,x) - x^{-s} \end{aligned}$$

および

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$$

を用いると，

$$\frac{\partial}{\partial s}\zeta(s,x+1)\bigg|_{s=0}=\frac{\partial}{\partial s}\zeta(s,x)\bigg|_{s=0}+\log x,$$
$$-\log\Gamma(x+1)=-\log\Gamma(x)-\log x$$

となり，

$$\begin{aligned} f(x+1)&=\frac{\partial}{\partial s}\zeta(s,x)\bigg|_{s=0}-\log\Gamma(x)\\ &=f(x) \end{aligned}$$

を得る．よって，(2)が示された．

(3)の証明

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\partial}{\partial s}\zeta\left(s,\frac{1}{2}\right)\bigg|_{s=0}-\log\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$$

を計算する．まず，

$$\begin{aligned} \zeta\left(s,\frac{1}{2}\right)&=\sum_{n=0}^{\infty}\left(n+\frac{1}{2}\right)^{-s}\\ &=2^s\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)^{-s}\\ &=2^s\left\{\sum_{n=1}^{\infty}n^{-s}-\sum_{n=1}^{\infty}(2n)^{-s}\right\}\\ &=2^s(1-2^{-s})\zeta(s)\\ &=(2^s-1)\zeta(s) \end{aligned}$$

に注目すると，

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial s}\zeta\left(s,\frac{1}{2}\right)\bigg|_{s=0}&=(\log 2)\zeta(0)\\ &=(\log 2)\left(-\frac{1}{2}\right)\\ &=-\frac{1}{2}\log 2 \end{aligned}$$

となる．ただし，$\zeta(0)=-\dfrac{1}{2}$ を用い，$\zeta'(0)$ の項は $(2^s-1)|_{s=0}=0$ より消

えている．また，前に計算した通り

$$-\log\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = -\log\sqrt{\pi}$$
$$= -\frac{1}{2}\log\pi$$

である．

したがって，

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2}\log 2\right)+\left(-\frac{1}{2}\log\pi\right)$$
$$= -\frac{1}{2}\log(2\pi)$$

となる．これで(3)が示された．このようにして，レルヒの公式の証明は完了した．

注意　(1)(2)により $f(x)$ は定数とわかっているので，(3)においては，どの x でも値を求めればよいが，$f\left(\frac{1}{2}\right)$ を計算することは要点である．事実，$f(1)=\zeta'(0)$ を直接求めようとすると，やさしくない．上記の証明は $\zeta'(0)$ のわかりやすい計算方法も示していることになる．

2.4　レルヒの公式とスターリングの公式の比較

レルヒの公式

$$\left.\frac{\partial}{\partial s}\zeta(s,x)\right|_{s=0} = \log\left(\frac{\Gamma(x)}{\sqrt{2\pi}}\right)$$

の $x=1$ という特別の場合である

$$\zeta'(0) = -\log\sqrt{2\pi}$$

あるいは

$$\prod_{n=1}^{\infty} n = \sqrt{2\pi}$$

という結果とスターリングの公式

$$n! \sim \sqrt{2\pi}n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n} \qquad (n \to \infty)$$

が類似していることは感じ取れるであろう．これらが同値であることは次のようにわかる．

定理 2.4.1 次は同値である．

(1) $\zeta'(0) = -\log\sqrt{2\pi}$.

(2) $\prod_{n=1}^{\infty} n = \sqrt{2\pi}$.

(3) $n! \sim \sqrt{2\pi}n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n} \qquad (n \to \infty)$. ▯

[証明]

(1)$\Longleftrightarrow$(2)は正規化積の定義そのものである．

(1)$\Longleftrightarrow$(3)には，$\mathrm{Re}(s) > -1$ に対して成立する表示

$$-\zeta'(s) = \lim_{N\to\infty}\left\{\sum_{n=1}^{N}(\log n)n^{-s} - \left(\frac{N^{1-s}\log N}{1-s} - \frac{N^{1-s}}{(1-s)^2} + \frac{1}{2}N^{-s}\log N\right)\right\}$$

を用いる．証明については

黒川信重『リーマン予想の 150 年』岩波書店，2009 年

を参照．ここで，$s=0$ とおくと

$$\begin{aligned}-\zeta'(0) &= \lim_{N\to\infty}\left\{\sum_{n=1}^{N}\log n - \left(N\log N - N + \frac{1}{2}\log N\right)\right\} \\ &= \lim_{N\to\infty}\log\left(\frac{N!}{N^{N+\frac{1}{2}}e^{-N}}\right)\end{aligned}$$

となる．よって，(1)と(3)の同値性がわかる． [証明終]

2.5 レルヒの公式の変形版

レルヒはレルヒの公式の変形版や応用も示している．簡単に触れておこう．

定理 2.5.1　極限公式(limit formula)

$$\lim_{s\to 1}\left(\zeta(s,x)-\frac{1}{s-1}\right)=-\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}.$$

□

［証明］　これは，$\zeta(s,x)$ の $s=1$ におけるローラン展開が

$$\zeta(s,x)=\frac{1}{s-1}-\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}+O(s-1)$$

となることと同じである．いま，$\zeta(s,x)$ の $s=1$ におけるローラン展開を

$$\zeta(s,x)=\frac{A_{-1}(x)}{s-1}+A_0(x)+A_1(x)(s-1)+\cdots$$

とおく．§2.2 で証明したように

$$A_{-1}(x)=1$$

である．レルヒの公式は $s=0$ におけるテイラー展開

$$\zeta(s,x)=B_0(x)+B_1(x)s+B_2(x)s^2+\cdots$$

において

$$B_1(x)=\log\left(\frac{\Gamma(x)}{\sqrt{2\pi}}\right)$$

を意味していた．なお，$B_0(x)=\dfrac{1}{2}-x$ であった．そこで，関係式

$$\frac{\partial}{\partial x}\zeta(s,x)=-s\zeta(s+1,x)$$

を $s=0$ の周りで考えることにすると

$$\frac{\partial}{\partial x}\zeta(s,x)=B_0'(x)+B_1'(x)s+B_2'(x)s^2+\cdots,$$

$$-s\zeta(s+1,x)=-A_{-1}(x)-A_0(x)s-A_1(x)s^2-\cdots$$

となり，等式

$$B_0'(x)=-A_{-1}(x),$$

$$B_1'(x)=-A_0(x)$$

を得る．したがって

$$A_0(x) = -\frac{d}{dx}\log\left(\frac{\Gamma(x)}{\sqrt{2\pi}}\right) = -\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}$$

と求まる． [証明終]

系

$$\lim_{s\to 1}\left(\zeta(s)-\frac{1}{s-1}\right) = \gamma.$$

□

[証明] レルヒの結果で，$x=1$ とすれば

$$\lim_{s\to 1}\left(\zeta(s)-\frac{1}{s-1}\right) = -\frac{\Gamma'(1)}{\Gamma(1)}$$

となる．ここで，$\Gamma(x)$ の無限積表示を用いると

$$-\frac{d}{dx}\log\Gamma(x) = \frac{1}{x}+\gamma+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n+x}-\frac{1}{n}\right)$$

となり，$x=1$ として

$$-\frac{\Gamma'(1)}{\Gamma(1)} = 1+\gamma+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}\right) = \gamma$$

と求まる． [証明終]

レルヒは，次のような応用を 1897 年に得ている．後に「チャウラ-セルバーグ(Chowla-Selberg)の公式」(1967 年)と誤って呼ばれることになるのは，歴史をよく調べない数学者の習性からであり，反省せねばならない．[歴史については，1903 年のランダウの論文(Crelle J., **125**, 64-188)を参照せよ.]

ここでは，記述を簡単にするために，特別の場合のみを記す．

定理 2.5.2（レルヒ，1897年）

(1) $$\prod_{\substack{m,n=-\infty \\ (m,n)\neq(0,0)}}^{\infty} (m^2+n^2) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)^4}{4\pi}.$$

(2) $\Delta(z)=e^{2\pi iz}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-e^{2\pi inz}\right)^{24}$

に対して

$$\Delta(i) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)^{24}}{2^{24}\pi^{18}}.$$

□

[証明]

(1) $Z(s)=\sum_{\substack{m,n=-\infty \\ (m,n)\neq(0,0)}}^{\infty} (m^2+n^2)^{-s}$

とおくと

$$Z(s) = 4\zeta(s)L(s)$$

と分解することができる．ここで，

$$\begin{aligned} L(s) &= \sum_{\substack{n\geqq 1 \\ \text{奇数}}} (-1)^{\frac{n-1}{2}} n^{-s} \\ &= 4^{-s}\left(\zeta\left(s,\frac{1}{4}\right)-\zeta\left(s,\frac{3}{4}\right)\right). \end{aligned}$$

この分解は2次拡大 $\mathbb{Q}(i)/\mathbb{Q}$ におけるゼータ関数の関係式

$$\zeta_{\mathbb{Q}(i)}(s) = \zeta(s)L(s)$$

に他ならず，類体論の基本となるものであるので，適当な数論の本を参照されたい．

さて，こうすると

$$\prod_{\substack{m,n=-\infty \\ (m,n)\neq(0,0)}}^{\infty} (m^2+n^2) = \exp\left(-Z'(0)\right),$$

$$Z'(0) = 4\zeta'(0)L(0)+4\zeta(0)L'(0)$$

となる．これまでに計算したところによれば

$$\zeta(0) = -\frac{1}{2},$$
$$\zeta'(0) = -\frac{1}{2}\log(2\pi)$$

である．また，

$$\begin{aligned} L(s) &= \sum_{n=0}^{\infty}(4n+1)^{-s} - \sum_{n=0}^{\infty}(4n+3)^{-s} \\ &= 4^{-s}\sum_{n=0}^{\infty}\left(n+\frac{1}{4}\right)^{-s} - 4^{-s}\sum_{n=0}^{\infty}\left(n+\frac{3}{4}\right)^{-s} \\ &= 4^{-s}\zeta\left(s, \frac{1}{4}\right) - 4^{-s}\zeta\left(s, \frac{3}{4}\right) \end{aligned}$$

であるから

$$\begin{aligned} L(0) &= \zeta\left(0, \frac{1}{4}\right) - \zeta\left(0, \frac{3}{4}\right) \\ &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) - \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{4}\right) \\ &= \frac{1}{2}, \\ L'(0) &= -(\log 4)\left(\zeta\left(0, \frac{1}{4}\right) - \zeta\left(0, \frac{3}{4}\right)\right) + \zeta'\left(0, \frac{1}{4}\right) - \zeta'\left(0, \frac{3}{4}\right) \\ &= -(\log 4)\cdot\frac{1}{2} + \log\frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}{\sqrt{2\pi}} - \log\frac{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}{\sqrt{2\pi}} \\ &= -\log 2 + \log\frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)} \end{aligned}$$

となる．ここで，ガンマ関数と三角関数のオイラーの関係式より

$$\frac{1}{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)} = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)}{\pi} = \frac{1}{\sqrt{2}\,\pi}$$

であるから

$$L'(0) = -\log 2 + \log \frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)^2}{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}$$
$$= -\log 2 + 2\log\Gamma\left(\frac{1}{4}\right) - \log(\sqrt{2}\,\pi)$$
$$= -\frac{3}{2}\log 2 - \log\pi + 2\log\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)$$

となる．これらを合わせると

$$Z'(0) = \log(4\pi) - 4\log\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)$$

を得る．したがって，(1)が示された．

(2)　$\Delta(z)$ はモジュラー群

$$SL_2(\mathbb{Z}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| \begin{array}{c} a,b,c,d \in \mathbb{Z} \\ ad-bc=1 \end{array} \right\}$$

に対する重さ12の保型形式であり，変換公式

$$\Delta\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = (cz+d)^{12}\Delta(z)$$

をすべての $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z})$ に対してみたす．ただし，z は上半平面

$$H = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) > 0\}$$

の変数である．このとき，

クロネッカーの極限公式

$$\prod_{\substack{m,n=-\infty \\ (m,n)\neq(0,0)}}^{\infty} \frac{|mz+n|^2}{\mathrm{Im}(z)} = 4\pi^2 \cdot \mathrm{Im}(z) \cdot |\Delta(z)|^{\frac{1}{6}}$$

が成立する．証明は黒川・栗原・斎藤『数論 II』(岩波書店，2005 年)の第 9 章を見られたい．

すると，$z=i$ とおいて，等式

$$\prod_{\substack{m,n=-\infty \\ (m,n)\neq(0,0)}}^{\infty} (m^2+n^2) = 4\pi^2 \Delta(i)^{\frac{1}{6}}$$

が得られる．したがって，(1)と比較することにより

$$4\pi^2 \Delta(i)^{\frac{1}{6}} = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)^4}{4\pi}$$

となる．よって，両辺を 6 乗して(2)を得る．　[証明終]

第3章
多重ガンマ関数

バーンズ(E.W. Barnes)は1904年に多重ガンマ関数を構成した．その方法は，多重フルビッツ・ゼータ関数を導入し，その $s=0$ における微分から，レルヒの公式を手掛りに，多重ガンマ関数に至ったのである．本章では，その周辺を説明する．また，後半の準備のために，負位数多重ガンマ関数や重み付き多重ガンマ関数も紹介する．

3.1 多重フルビッツ・ゼータ関数と多重ガンマ関数

バーンズ(1904年)は，レルヒの公式

$$\Gamma(x)=\sqrt{2\pi}\exp\left(\frac{\partial}{\partial s}\zeta(s,x)\bigg|_{s=0}\right)$$

から多重ガンマ関数を構想した．つまり，多重フルビッツ・ゼータ関数を，まず導入するのである．

簡明な場合を先に述べると，多重フルビッツ・ゼータ関数を $r=0,1,2,\cdots$ に対して

$$\begin{aligned}\zeta_r(s,x)&=\sum_{n_1,\cdots,n_r\geqq 0}(n_1+\cdots+n_r+x)^{-s}\\&=\sum_{n=0}^{\infty}{}_rH_n(n+x)^{-s}\end{aligned}$$

と定義する．ここで

$$ {}_rH_n = \binom{n+r-1}{n} $$

は重複組合せの数である．ただし，

$$ \zeta_0(s,x) = x^{-s} $$

とする．

もちろん，

$$ \zeta_1(s,x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+x)^{-s} $$

は，もともとのフルビッツ・ゼータ関数である．

この多重フルビッツ・ゼータ関数 $\zeta_r(s,x)$ は

$$ \zeta_r(s,x) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} \frac{e^{-xt}t^{s-1}}{(1-e^{-t})^r} dt $$

という積分表示によって，絶対収束域 $\mathrm{Re}(s)>r$ から，すべての複素数 s へと解析接続ができて，$s=0$ においては正則である．

そこで，多重ガンマ関数を

$$ \Gamma_r(x) = \exp\left(\frac{\partial}{\partial s}\zeta_r(s,x)\bigg|_{s=0} \right) $$

と定義するのである．こうすると，位数 r の有理型関数 $\Gamma_r(x)$ が得られ，

$$ \Gamma_r(x+1) = \Gamma_r(x)\Gamma_{r-1}(x)^{-1} $$

という周期性や，

$$ \Gamma_r(Nx) = \left(\prod_{k_1,\cdots,k_r=0,\cdots,N-1} \Gamma_r\left(x+\frac{k_1+\cdots+k_r}{N} \right) \right) \times N^{-\zeta_r(0,Nx)} $$

という N 倍角の公式が成立する．レルヒの公式から

$$ \Gamma_1(x) = \frac{\Gamma(x)}{\sqrt{2\pi}} $$

である．また，

$$\Gamma_0(x) = \exp\left(\frac{\partial}{\partial s}(x^{-s})\bigg|_{s=0}\right) = \frac{1}{x}$$

となっている．したがって，

$$\Gamma_1(x+1) = \frac{\Gamma(x+1)}{\sqrt{2\pi}} = \frac{\Gamma(x)}{\sqrt{2\pi}}\cdot x = \Gamma_1(x)\Gamma_0(x)^{-1}$$

が確認できる．

このように，多重フルビッツ・ゼータ関数 $\zeta_r(s,x)$ と多重ガンマ関数 $\Gamma_r(x)$ は扱いやすい形になっているが，種々の性質を調べるには，より一般の周期 $\boldsymbol{\omega}=(\omega_1, \cdots, \omega_r)$ 付の多重フルビッツ・ゼータ関数 $\zeta_r(s,x,\boldsymbol{\omega})$ と多重ガンマ関数 $\Gamma_r(x,\boldsymbol{\omega})$ にしたほうが見通しがよくなることも多い．ただし，

$$\zeta_r(s,x) = \zeta_r(s,x,(1, \cdots, 1)),$$
$$\Gamma_r(x) = \Gamma_r(x,(1, \cdots, 1))$$

となっている．

以下では，一般周期の形にして多重フルビッツ・ゼータ関数のさまざまな性質を証明していくことにする．

3.2　多重フルビッツ・ゼータ関数の解析接続

多重フルビッツ・ゼータ関数 $\zeta_r(s,x,\boldsymbol{\omega})$ および多重ガンマ関数は

E.W. Barnes,"On the theory of the multiple gamma functions", *Trans. Cambridge Phil. Soc.*, **19** (1904), 374-423

において導入された．ここで，$\boldsymbol{\omega}=(\omega_1, \cdots, \omega_r)$ は当面 $\omega_1, \cdots, \omega_r>0$ とする．[一般には，$\omega_1, \cdots, \omega_r$ が複素平面において0を通るある直線に関して片側に存在していればよい.]

多重フルビッツ・ゼータ関数

$$\zeta_r(s,x,\boldsymbol{\omega}) = \sum_{n_1,\cdots,n_r \geqq 0} (n_1\omega_1+\cdots+n_r\omega_r+x)^{-s}$$
$$= \sum_{\boldsymbol{n}\geqq\boldsymbol{0}} (\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\omega}+x)^{-s}$$

の解析接続は $r=1$ の場合とまったく同様である．それは $\mathrm{Re}(s)>r$ において有効な積分表示

$$\zeta_r(s,x,\boldsymbol{\omega}) = \frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^\infty \varphi(t,x,\boldsymbol{\omega})t^{s-1}dt,$$
$$\varphi(t,x,\boldsymbol{\omega}) = \sum_{\boldsymbol{n}\geqq\boldsymbol{0}} e^{-(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\omega}+x)t}$$
$$= \frac{e^{-xt}}{(1-e^{-\omega_1 t})\cdots(1-e^{-\omega_r t})}$$

から出発する．解析接続は

$$\zeta_r(s,x,\boldsymbol{\omega}) = \frac{1}{\Gamma(s)}\int_1^\infty \varphi(t,x,\boldsymbol{\omega})t^{s-1}dt + \frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^1 \varphi(t,x,\boldsymbol{\omega})t^{s-1}dt$$

において，第 2 項を $\varphi(t,x,\boldsymbol{\omega})$ の $t=0$ におけるローラン展開

$$\varphi(t,x,\boldsymbol{\omega}) = \sum_{n=-r}^{\infty} a_n(x,\boldsymbol{\omega})t^n$$

を用いることによって近似すればよい．その結果，$\zeta_r(s,x,\boldsymbol{\omega})$ は，すべての複素数 s に対して有理型関数として解析接続され $s=0$ においては正則となる．実際，$n=0,1,2,\cdots$ に対して

$$\zeta_r(-n,x,\boldsymbol{\omega}) = (-1)^n n! a_n(x,\boldsymbol{\omega})$$

であり，各 $a_n(x,\boldsymbol{\omega})$ は多重ベルヌイ多項式と呼ぶべきものとなる．

例 $r=0,1$ の場合を計算しておこう．まず，

$$\zeta_0(s,x,\varnothing) = x^{-s}$$

である．次に

$$\zeta_1(s,x,\omega) = \sum_{n=0}^{\infty}(n\omega+x)^{-s}$$
$$= \omega^{-s}\sum_{n=0}^{\infty}\left(n+\frac{x}{\omega}\right)^{-s}$$
$$= \omega^{-s}\zeta\left(s,\frac{x}{\omega}\right)$$

は通常のフルビッツ・ゼータ関数と簡単な因子 ω^{-s} を除いて一致する． ▯

3.3　多重ガンマ関数の構成

多重ガンマ関数 $\Gamma_r(x,\boldsymbol{\omega})$ は

$$\Gamma_r(x,\boldsymbol{\omega}) = \exp\left(\frac{\partial}{\partial s}\zeta_r(s,x,\boldsymbol{\omega})\bigg|_{s=0}\right)$$

と定義される．基本的な性質はバーンズによって確立された．

定理 3.3.1（バーンズ，1904年）

(1) $\Gamma_r(x,\boldsymbol{\omega})$ は $x\in\mathbb{C}$ について有理型関数で，位数 r.

(2) $\Gamma_r(x,\boldsymbol{\omega})^{-1}=\rho_r(\boldsymbol{\omega})x\cdot e^{Q_{\boldsymbol{\omega}}(x)}\prod_{\substack{\boldsymbol{n}\geqq\boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{n}\neq\boldsymbol{0}}} P_r\left(-\frac{x}{\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\omega}}\right)$.

ここで，$Q_{\boldsymbol{\omega}}(x)$ は x の r 次多項式で定数項は0，$\rho_r(\boldsymbol{\omega})$ はある定数（$\boldsymbol{\omega}$ で決まる），

$$P_r(u) = (1-u)\exp\left(u+\frac{u^2}{2}+\cdots+\frac{u^r}{r}\right).$$

▯

バーンズは

$$\Gamma_r^{\mathrm{B}}(x,\boldsymbol{\omega}) = \Gamma_r(x,\boldsymbol{\omega})\rho_r(\boldsymbol{\omega})$$

を使っている．こうすると $\Gamma_r^{\mathrm{B}}(x,\boldsymbol{\omega})$ は $x=0$ において留数1の1位の極をもつことになる．ちなみに，$\Gamma_r(x,\boldsymbol{\omega})$ は $x=0$ において1位の極をもち，その留数は $\rho_r(\boldsymbol{\omega})^{-1}$ となる．正規化積の観点からは

$$\Gamma_r(x,\boldsymbol{\omega})^{-1}=\prod_{\boldsymbol{n}\geqq\boldsymbol{0}}(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\omega}+x)$$

がわかりやすい表示であり

$$\rho_r(\boldsymbol{\omega})=\left(\prod_{\substack{\boldsymbol{n}\geqq\boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{n}\neq\boldsymbol{0}}}(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\omega})\right)^{-1}$$

となる．この関数 $\rho_r(\boldsymbol{\omega})$ はバーンズにより「スターリング保型形式」と呼ばれる大切な関数であり，次節で扱う．

多重ガンマ関数 $\Gamma_r(x,\boldsymbol{\omega})$ の詳細な性質と証明については，§3.2 で上げたバーンズの 1904 年の論文を参照されたい．

バーンズの定理の証明［スケッチ］

(2)の両辺の対数をとって，x によって $r+1$ 回微分した形である次の等式を言えばよい．

補題

$$\frac{d^{r+1}}{dx^{r+1}}\log\Gamma_r(x,\boldsymbol{\omega})=(-1)^{r+1}r!\sum_{\boldsymbol{n}\geqq\boldsymbol{0}}\frac{1}{(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\omega}+x)^{r+1}}$$
$$=(-1)^{r+1}r!\zeta_r(r+1,x,\boldsymbol{\omega}).$$

□

［補題の証明］

$$\frac{d^{r+1}}{dx^{r+1}}\log\Gamma_r(x,\boldsymbol{\omega})=\left.\frac{\partial^{r+2}}{\partial x^{r+1}\partial s}\zeta_r(s,x,\boldsymbol{\omega})\right|_{s=0}$$

において

$$\frac{\partial^{r+1}}{\partial x^{r+1}}\zeta_r(s,x,\boldsymbol{\omega})=(-1)^{r+1}s(s+1)\cdots(s+r)\sum_{\boldsymbol{n}\geqq\boldsymbol{0}}\frac{1}{(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\omega}+x)^{s+r+1}}$$
$$=(-1)^{r+1}s(s+1)\cdots(s+r)\zeta_r(s+r+1,x,\boldsymbol{\omega})$$

であるから

$$\begin{aligned}\frac{d^{r+1}}{dx^{r+1}}\log\Gamma_r(x,\boldsymbol{\omega}) &= \frac{\partial}{\partial s}((-1)^{r+1}s(s+1)\cdots(s+r)\zeta_r(s+r+1,x,\boldsymbol{\omega}))\Big|_{s=0}\\ &= (-1)^{r+1}r!\zeta_r(r+1,x,\boldsymbol{\omega}).\end{aligned}$$

[証明終]

例　多重ガンマ関数 $\Gamma_r(x,\omega)$ の $r=0,1$ の場合を具体的に求めておこう．まず，

$$\begin{aligned}\Gamma_0(x,\varnothing) &= \exp\left(\frac{\partial}{\partial s}(x^{-s})\Big|_{s=0}\right)\\ &= \frac{1}{x}\end{aligned}$$

である．次に

$$\Gamma_1(x,\omega) = \exp\left(\frac{\partial}{\partial s}\zeta_1(s,x,\omega)\Big|_{s=0}\right)$$

に対しては，既に求めた表示

$$\zeta_1(s,x,\omega) = \omega^{-s}\zeta\left(s,\frac{x}{\omega}\right)$$

を用いることにより

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial s}\zeta_1(s,x,\omega)\Big|_{s=0} &= -(\log\omega)\zeta\left(0,\frac{x}{\omega}\right)+\frac{\partial}{\partial s}\zeta\left(s,\frac{x}{\omega}\right)\Big|_{s=0}\\ &= -(\log\omega)\left(\frac{1}{2}-\frac{x}{\omega}\right)+\log\frac{\Gamma\left(\frac{x}{\omega}\right)}{\sqrt{2\pi}}\\ &= \log\left(\frac{\Gamma\left(\frac{x}{\omega}\right)}{\sqrt{2\pi}}\cdot\omega^{\frac{x}{\omega}-\frac{1}{2}}\right)\end{aligned}$$

となる．したがって，

$$\Gamma_1(x,\omega) = \frac{\Gamma\left(\frac{x}{\omega}\right)}{\sqrt{2\pi}}\cdot\omega^{\frac{x}{\omega}-\frac{1}{2}}$$

である. □

3.4 スターリング保型形式

スターリング保型形式は

$$\rho_r(\boldsymbol{\omega}) = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x\Gamma_r(x,\boldsymbol{\omega})}$$

と定義される．正規化積によって書くと

$$\frac{1}{\Gamma_r(x,\boldsymbol{\omega})} = \prod_{\boldsymbol{n}\geqq \boldsymbol{0}} (\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\omega}+x)$$

であるから

$$\rho_r(\boldsymbol{\omega}) = \prod_{\substack{\boldsymbol{n}\geqq \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{n}\neq\boldsymbol{0}}} (\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\omega})$$

ということになる．

これも，$r=0,1$ のときに明示式を求めておこう．

まず，$x\Gamma_0(x,\varnothing)=1$ であるから

$$\rho_0(\varnothing) = 1$$

となる．次に，

$$\rho_1(\omega) = \prod_{n=1}^{\infty} (n\omega)$$

を正規化積の計算練習として求めてみよう．対応するゼータ関数は

$$\begin{aligned} Z(s) &= \sum_{n=1}^{\infty} (n\omega)^{-s} \\ &= \omega^{-s}\zeta(s) \end{aligned}$$

である．したがって，

$$Z'(0) = -(\log\omega)\zeta(0)+\zeta'(0)$$

$$
\begin{aligned}
&= -(\log\omega)\left(-\frac{1}{2}\right)+\left(-\frac{1}{2}\log(2\pi)\right)\\
&= -\frac{1}{2}\log\left(\frac{2\pi}{\omega}\right)
\end{aligned}
$$

であるから

$$
\begin{aligned}
\rho_1(\omega) &= \exp(-Z'(0))\\
&= \sqrt{\frac{2\pi}{\omega}}
\end{aligned}
$$

となる．とくに，

$$
\rho_1(1) = \sqrt{2\pi} = \prod_{n=1}^{\infty} n
$$

がスターリングの公式に表れた定数である(§1.1，§2.4)．

もちろん，

$$
\Gamma_1(x,\omega)^{-1} = \sqrt{\frac{2\pi}{\omega}}\, x e^{\left(\frac{\gamma}{\omega}-\frac{\log\omega}{\omega}\right)x} \prod_{n=1}^{\infty} P_1\left(-\frac{x}{n\omega}\right)
$$

という明示式から

$$
\rho_1(\omega) = \sqrt{\frac{2\pi}{\omega}}
$$

と求めることもできる．この明示式は

$$
\Gamma_1(x,\omega)^{-1} = \Gamma\left(\frac{x}{\omega}\right)^{-1}\cdot\sqrt{2\pi}\cdot\omega^{\left(\frac{1}{2}-\frac{x}{\omega}\right)}
$$

において無限積表示

$$
\Gamma(x)^{-1} = x e^{\gamma x} \prod_{n=1}^{\infty}\left\{\left(1+\frac{x}{n}\right)e^{-\frac{x}{n}}\right\}
$$

を用いれば得られる．

なお，$\rho_2(\omega_1,\omega_2)$ の研究はバーンズの後，新谷卓郎によって論文

T. Shintani, “On a Kronecker limit formula for real quadratic fields”, *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo*, **24** (1977), 167–199,

T. Shintani, “A proof of the classical Kronecker limit formula”,

Tokyo J. Math., **3** (1980), 191-199

においてなされた．たとえば，$\mathrm{Im}(\tau)>0$ に対して関係式

$$\rho_2(1,\tau)\rho_2(1,-\tau)=(2\pi)^{\frac{3}{2}}\tau^{\frac{1}{2}}\eta(\tau)\exp\left(\pi i\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{12\tau}\right)\right)$$

が知られている．ここで，

$$\eta(\tau)=e^{\frac{\pi i\tau}{12}}\prod_{n=1}^{\infty}(1-e^{2\pi in\tau})$$

はデデキント・イータ関数である．（ちなみに，$\Delta(\tau)=\eta(\tau)^{24}$ である．）

バーンズは 2 重ガンマ関数論を確立した論文

E.W. Barnes, "The theory of the double gamma function", *Philos. Trans. Royal Soc.* (A), **196** (1901), 265-388

において $\rho_2(1,1)$ を計算している (p.368)．その結果は次の通りである．

定理 3.4.1　$\rho_2(1,1)=\exp\left(\frac{1}{2}\log(2\pi)-\zeta'(-1)\right).$ □

［証明］

$$\begin{aligned}\rho_2(1,1)&=\prod_{\substack{n_1,n_2\geqq 0\\(n_1,n_2)\neq(0,0)}}(n_1+n_2)\\&=\exp(-Z'(0)),\end{aligned}$$

$$Z(s)=\sum_{\substack{n_1,n_2\geqq 0\\(n_1,n_2)\neq(0,0)}}(n_1+n_2)^{-s}$$

である．$Z(s)$ の計算は容易であり

$$\begin{aligned}Z(s)&=\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)n^{-s}\\&=\zeta(s)+\zeta(s-1)\end{aligned}$$

となる．よって

$$Z'(0)=\zeta'(0)+\zeta'(-1)$$

から

$$\rho_2(1,1)=\exp(\zeta'(0)-\zeta'(-1))$$
$$=\exp\left(\frac{1}{2}(\log 2\pi)-\zeta'(-1)\right)$$

とわかる.　［証明終］

3.5　周期性

ここでは，多重ガンマ関数の周期性を証明する.

定理 3.5.1

$$\Gamma_r(x+\omega_i,\boldsymbol{\omega})=\Gamma_r(x,\boldsymbol{\omega})\Gamma_{r-1}(x,\boldsymbol{\omega}\langle i\rangle)^{-1}.$$

ここで，

$$\boldsymbol{\omega}\langle i\rangle=(\omega_1,\cdots,\omega_{i-1},\omega_{i+1},\cdots,\omega_r)$$

である.　□

［証明］　多重フルビッツ・ゼータ関数の関係式

$$\zeta_r(s,x+\omega_i,\boldsymbol{\omega})=\zeta_r(s,x,\boldsymbol{\omega})-\zeta_{r-1}(s,x,\boldsymbol{\omega}\langle i\rangle)$$

を示せば，あとは $s=0$ における微分をとることによって定理の周期性が得られる．多重フルビッツ・ゼータ関数の，上記の関係式は，

$$\zeta_r(s,x+\omega_i,\boldsymbol{\omega})=\sum_{\substack{\boldsymbol{n}\geqq\boldsymbol{0}\\ n_i\geqq 1\ (i\ \text{番目のみ})}}(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\omega}+x)^{-s},$$

$$\zeta_r(s,x,\boldsymbol{\omega})=\sum_{\boldsymbol{n}\geqq\boldsymbol{0}}(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\omega}+x)^{-s},$$

$$\zeta_{r-1}(s,x,\boldsymbol{\omega}\langle i\rangle)=\sum_{\substack{\boldsymbol{n}\geqq\boldsymbol{0}\\ n_i=0\ (i\ \text{番目})}}(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\omega}+x)^{-s}$$

に注目すればよい．　[証明終]

例をいくつか書いておこう．

(1)　$\Gamma_1(x+\omega,\omega)=\Gamma_1(x,\omega)x.$

(2)　$\Gamma_2(x+\omega_1,(\omega_1,\omega_2))=\Gamma_2(x,(\omega_1,\omega_2))\Gamma_1(x,\omega_2)^{-1},$

$\Gamma_2(x+\omega_2,(\omega_1,\omega_2))=\Gamma_2(x,(\omega_1,\omega_2))\Gamma_1(x,\omega_1)^{-1}.$

(3)　$\Gamma_3(x+\omega_1,(\omega_1,\omega_2,\omega_3))=\Gamma_3(x,(\omega_1,\omega_2,\omega_3))\Gamma_2(x,(\omega_2,\omega_3))^{-1}.$

3.6　N 倍角公式

N 倍角の公式とは，次の定理を指す．

定理 3.6.1　$N=1,\ 2,\ 3,\cdots$ に対して次が成立する．

(1)　$$\Gamma_r(Nx,\boldsymbol{\omega})=\prod_{k_1,\cdots,k_r=0,\cdots,N-1}\Gamma_r\left(x+\frac{k_1\omega_1+\cdots+k_r\omega_r}{N},\boldsymbol{\omega}\right)\times N^{-\zeta_r(0,Nx,\boldsymbol{\omega})}.$$

(2)　$$\prod_{\substack{k_1,\cdots,k_r=0,\cdots,N-1\\(k_1,\cdots,k_r)\neq(0,\cdots,0)}}\Gamma_r\left(\frac{k_1\omega_1+\cdots+k_ra_r}{N},\boldsymbol{\omega}\right)=N^{\zeta_r(0,0,\boldsymbol{\omega})-1}.$$

□

[証明]

(1)　まず

$$\zeta_r(s,Nx,\boldsymbol{\omega})=N^{-s}\sum_{\boldsymbol{k}}\zeta_r\left(s,x+\frac{\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{\omega}}{N},\boldsymbol{\omega}\right)$$

に注意する．ここで，$\boldsymbol{k}=(k_1,\cdots,k_r)$ は，$k_1,\cdots,k_r=0,\cdots,N-1$ を動く．これは

$$\begin{aligned}\zeta_r(s,Nx,\boldsymbol{\omega})&=\sum_{\boldsymbol{n}\geqq\boldsymbol{0}}(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\omega}+Nx)^{-s}\\&=N^{-s}\sum_{\boldsymbol{n}\geqq\boldsymbol{0}}\left(x+\frac{\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\omega}}{N}\right)^{-s}\end{aligned}$$

において

$$\boldsymbol{n} = N\boldsymbol{m}+\boldsymbol{k},$$
$$\boldsymbol{m} = (m_1, \cdots, m_r) \geqq \boldsymbol{0},$$
$$\boldsymbol{k} = (k_1, \cdots, k_r), \quad k_1, \cdots, k_r = 0, \cdots, N-1$$

とおきかえることによって

$$\begin{aligned}\zeta_r(s, Nx, \boldsymbol{\omega}) &= N^{-s}\sum_{\boldsymbol{k}}\sum_{\boldsymbol{m}\geqq\boldsymbol{0}}\left(\left(x+\frac{\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{\omega}}{N}\right)+\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{\omega}\right)^{-s}\\ &= N^{-s}\sum_{\boldsymbol{k}}\zeta_r\left(s, x+\frac{\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{\omega}}{N}, \boldsymbol{\omega}\right)\end{aligned}$$

と得られる．したがって，s によって微分して

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial s}\zeta_r(s, Nx, \boldsymbol{\omega})\Big|_{s=0} &= \sum_{\boldsymbol{k}}\frac{\partial}{\partial s}\zeta_r\left(s, x+\frac{\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{\omega}}{N}, \boldsymbol{\omega}\right)\Big|_{s=0}\\ &\quad -(\log N)\sum_{\boldsymbol{k}}\zeta_r\left(0, x+\frac{\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{\omega}}{N}, \boldsymbol{\omega}\right)\\ &= \sum_{\boldsymbol{k}}\frac{\partial}{\partial s}\zeta_r\left(s, x+\frac{\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{\omega}}{N}, \boldsymbol{\omega}\right)\Big|_{s=0}\\ &\quad -(\log N)\zeta_r(0, Nx, \boldsymbol{\omega})\end{aligned}$$

となる．よって，

$$\begin{aligned}\Gamma_r(Nx, \boldsymbol{\omega}) &= \exp\left(\frac{\partial}{\partial s}\zeta_r(s, Nx, \boldsymbol{\omega})\Big|_{s=0}\right)\\ &= \exp\left(\sum_{\boldsymbol{k}}\frac{\partial}{\partial s}\zeta_r\left(s, x+\frac{\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{\omega}}{N}, \boldsymbol{\omega}\right)\Big|_{s=0}\right)\\ &\quad \times N^{-\zeta_r(0, Nx, \boldsymbol{\omega})}\\ &= \prod_{\boldsymbol{k}}\Gamma_r\left(x+\frac{\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{\omega}}{N}, \boldsymbol{\omega}\right)\cdot N^{-\zeta_r(0, Nx, \boldsymbol{\omega})}\end{aligned}$$

という(1)の関係式が得られた．

(2)　(1)より

$$\prod_{\boldsymbol{k}\neq\boldsymbol{0}}\Gamma_r\left(x+\frac{\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{\omega}}{N}, \boldsymbol{\omega}\right) = \frac{x\Gamma_r(Nx, \boldsymbol{\omega})}{x\Gamma_r(x, \boldsymbol{\omega})}\cdot N^{\zeta_r(0, Nx, \boldsymbol{\omega})}$$

となる．ここで，

$$\lim_{x\to 0} x\Gamma_r(x,\boldsymbol{\omega}) = \rho_r(\boldsymbol{\omega})^{-1}$$

を用いると

$$\lim_{x\to 0} x\Gamma_r(Nx,\boldsymbol{\omega}) = N^{-1}\rho_r(\boldsymbol{\omega})^{-1}$$

となる．よって

$$\begin{aligned}\prod_{\boldsymbol{k}\neq\boldsymbol{0}} \Gamma_r\left(\frac{\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{\omega}}{N},\boldsymbol{\omega}\right) &= \frac{N^{-1}\rho_r(\boldsymbol{\omega})^{-1}}{\rho_r(\boldsymbol{\omega})^{-1}} N^{\zeta_r(0,0,\boldsymbol{\omega})} \\ &= N^{\zeta_r(0,0,\boldsymbol{\omega})-1}\end{aligned}$$

が成立する．　［証明終］

3.7　斉次性

多重ガンマ関数 $\Gamma_r(x,\boldsymbol{\omega})$ の斉次性とは次を指している．

定理 3.7.1　$c>0$ に対して

$$\Gamma_r(cx,c\boldsymbol{\omega}) = \Gamma_r(x,\boldsymbol{\omega})c^{-\zeta_r(0,x,\boldsymbol{\omega})}.$$

□

［証明］　フルビッツ・ゼータ関数に対して

$$\begin{aligned}\zeta_r(s,cx,c\boldsymbol{\omega}) &= \sum_{\boldsymbol{n}\geqq\boldsymbol{0}} (\boldsymbol{n}\cdot c\boldsymbol{\omega}+cx)^{-s} \\ &= c^{-s}\sum_{\boldsymbol{n}\geqq\boldsymbol{0}} (\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\omega}+x)^{-s} \\ &= c^{-s}\zeta_r(s,x,\boldsymbol{\omega})\end{aligned}$$

となるので

$$\frac{\partial}{\partial s}\zeta_r(s,cx,c\boldsymbol{\omega})\bigg|_{s=0} = \frac{\partial}{\partial s}\zeta_r(s,x,\boldsymbol{\omega})\bigg|_{s=0} -(\log c)\zeta_r(0,x,\boldsymbol{\omega})$$

が成り立つ．よって

$$\begin{aligned}\Gamma_r(cx, c\boldsymbol{\omega}) &= \exp\left(\frac{\partial}{\partial s}\zeta_r(s, cx, c\boldsymbol{\omega})\Big|_{s=0}\right)\\ &= \exp\left(\frac{\partial}{\partial s}\zeta_r(s, x, \boldsymbol{\omega})\Big|_{s=0}\right)\cdot c^{-\zeta_r(0,x,\boldsymbol{\omega})}\\ &= \Gamma_r(x, \boldsymbol{\omega})c^{-\zeta_r(0,x,\boldsymbol{\omega})}.\end{aligned}$$

[証明終]

スターリング保型形式 $\rho_r(\boldsymbol{\omega})$ の斉次性も証明しておこう．

定理 3.7.2　$c>0$ に対して

$$\rho_r(c\boldsymbol{\omega}) = \rho_r(\boldsymbol{\omega})\cdot c^{\zeta_r(0,0,\boldsymbol{\omega})-1}.$$

□

［証明］　多重ガンマ関数の斉次性より

$$\frac{x\Gamma_r(x, \boldsymbol{\omega})}{(cx)\Gamma_r(cx, c\boldsymbol{\omega})} = c^{\zeta_r(0,x,\boldsymbol{\omega})-1}$$

となる．ここで

$$\lim_{x\to 0} x\Gamma_r(x, \boldsymbol{\omega}) = \rho_r(\boldsymbol{\omega})^{-1},$$

$$\lim_{x\to 0}(cx)\Gamma_r(cx, c\boldsymbol{\omega}) = \rho_r(c\boldsymbol{\omega})^{-1}$$

となることに注意すると定理を得る．　[証明終]

3.8　負位数多重ガンマ関数

ここでは $\Gamma_{-r}(x)$ や $\Gamma_{-r}(x, \boldsymbol{\omega})$ を考えてみよう．そのヒントは

$$\zeta_r(s, x) = \frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^\infty (1-e^{-t})^{-r}e^{-xt}t^{s-1}dt$$

という積分表示にある．これから，負位数多重フルビッツ・ゼータ関数

$$\zeta_{-r}(s, x) = \frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^\infty (1-e^{-t})^{r}e^{-xt}t^{s-1}dt$$

を考えるのは自然である．さらに

$$\zeta_{-r}(s,x,(\omega_1,\cdots,\omega_r))=\frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^\infty(1-e^{-t\omega_1})\cdots(1-e^{-t\omega_r})e^{-xt}t^{s-1}dt$$

とすることも自然なことである．そこで，負位数多重ガンマ関数を

$$\Gamma_{-r}(x)=\exp\left(\frac{\partial}{\partial s}\zeta_{-r}(s,x)\Big|_{s=0}\right),$$
$$\Gamma_{-r}(x,\boldsymbol{\omega})=\exp\left(\frac{\partial}{\partial s}\zeta_{-r}(s,x,\boldsymbol{\omega})\Big|_{s=0}\right)$$

と定義する．ここで

$$\Gamma_{-r}(x)=\Gamma_{-r}(x,(1,\cdots,1))$$

となっていることに注意されたい．

定理 3.8.1

$$\Gamma_{-r}(x,(\omega_1,\cdots,\omega_r))=\prod_{k=0}^{r}\prod_{1\leqq i_1<\cdots<i_k\leqq r}(x+\omega_{i_1}+\cdots+\omega_{i_k})^{(-1)^{k+1}}$$
$$=\prod_{n_1,\cdots,n_r=0,1}(x+n_1\omega_1+\cdots+n_r\omega_r)^{(-1)^{n_1+\cdots+n_r+1}}.$$

□

［証明］　負位数多重フルビッツ・ゼータ関数は

$$\zeta_{-r}(s,x,\boldsymbol{\omega})=\sum_{k=0}^{r}(-1)^k\sum_{1\leqq i_1<\cdots<i_k\leqq r}\frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^\infty e^{-(x+\omega_{i_1}+\cdots+\omega_{i_k})t}t^{s-1}dt$$
$$=\sum_{k=0}^{r}(-1)^k\sum_{1\leqq i_1<\cdots<i_k\leqq r}(x+\omega_{i_1}+\cdots+\omega_{i_k})^{-s}$$

と計算される．よって

$$\Gamma_{-r}(x,\boldsymbol{\omega})=\exp\left(\frac{\partial}{\partial s}\zeta_{-r}(s,x,\boldsymbol{\omega})\Big|_{s=0}\right)$$
$$=\exp\left(\sum_{k=0}^{r}(-1)^{k+1}\sum_{1\leqq i_1<\cdots<i_k\leqq r}\log(x+\omega_{i_1}+\cdots+\omega_{i_k})\right)$$
$$=\prod_{k=0}^{r}\prod_{1\leqq i_1<\cdots<i_k\leqq r}(x+\omega_{i_1}+\cdots+\omega_{i_k})^{(-1)^{k+1}}$$

$$= \prod_{n_1,\cdots,n_r=0,1} (x+n_1\omega_1+\cdots+n_r\omega_r)^{(-1)^{n_1+\cdots+n_r+1}}.$$

[証明終]

例　負位数多重ガンマ関数は

$$\Gamma_{-1}(x,\omega) = \frac{x+\omega}{x},$$

$$\Gamma_{-2}(x,(\omega_1,\omega_2)) = \frac{(x+\omega_1)(x+\omega_2)}{x(x+\omega_1+\omega_2)},$$

$$\Gamma_{-3}(x,(\omega_1,\omega_2,\omega_3)) = \frac{(x+\omega_1)(x+\omega_2)(x+\omega_3)(x+\omega_1+\omega_2+\omega_3)}{x(x+\omega_1+\omega_2)(x+\omega_2+\omega_3)(x+\omega_3+\omega_1)}.$$

□

練習問題

$r=1,2,3$ に対して

$$\zeta_{-r}(s,x,(\omega_1,\ \cdots,\omega_r))$$

の $s=0,-1,\ \cdots,-r$ における値を求めよ.

[解答]

$$\zeta_{-1}(s,x,\omega_1) = x^{-s}-(x+\omega_1)^{-s},$$

$$\zeta_{-2}(s,x,(\omega_1,\omega_2)) = x^{-s}-(x+\omega_1)^{-s}-(x+\omega_2)^{-s}+(x+\omega_1+\omega_2)^{-s},$$

$$\begin{aligned}\zeta_{-3}(s,x,(\omega_1,\omega_2,\omega_3)) &= x^{-s}-(x+\omega_1)^{-s}-(x+\omega_2)^{-s}-(x+\omega_3)^{-s}\\ &\quad +(x+\omega_1+\omega_2)^{-s}+(x+\omega_2+\omega_3)^{-s}+(x+\omega_3+\omega_1)^{-s}\\ &\quad -(x+\omega_1+\omega_2+\omega_3)^{-s}\end{aligned}$$

であるので,

$$\zeta_{-r}(-n,x,(\omega_1,\ \cdots,\omega_r)) = \begin{cases} 0 & n=0,1,\ \cdots,r-1 \text{ のとき},\\ (-1)^r r!\omega_1\cdots\omega_r & n=r \text{ のとき}\end{cases}$$

となる.

[解答終]

注意　上記の結論は，すべての $r \geqq 1$ に対して成立する．読者は証明に挑戦されたい．

3.9　重み付き多重ガンマ関数

前節の構成は，より一般化することができる．それは，

$$\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \cdots, \alpha_r), \quad \alpha_1, \cdots, \alpha_r \in \mathbb{Z}$$

という重み $\boldsymbol{\alpha}$ の情報を添加して，重み付き多重フルビッツ・ゼータ関数 $\zeta_r^{\boldsymbol{\alpha}}(s, x, \boldsymbol{\omega})$ を

$$\zeta_r^{\boldsymbol{\alpha}}(s, x, \boldsymbol{\omega}) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty (1-e^{-t\omega_1})^{-\alpha_1} \cdots (1-e^{-t\omega_r})^{-\alpha_r} e^{-xt} t^{s-1} dt$$

と定義し，重み付き多重ガンマ関数 $\Gamma_r^{\boldsymbol{\alpha}}(x, \boldsymbol{\omega})$ を

$$\Gamma_r^{\boldsymbol{\alpha}}(x, \boldsymbol{\omega}) = \exp\left(\frac{\partial}{\partial s} \zeta_r^{\boldsymbol{\alpha}}(s, x, \boldsymbol{\omega}) \bigg|_{s=0} \right)$$

と構成するのである．通常の多重ガンマ関数は

$$\Gamma_r(x, \boldsymbol{\omega}) = \Gamma_r^{(1, \cdots, 1)}(x, \boldsymbol{\omega})$$

であり，負位数多重ガンマ関数は

$$\Gamma_{-r}(x, \boldsymbol{\omega}) = \Gamma_r^{(-1, \cdots, -1)}(x, \boldsymbol{\omega})$$

である．

第 II 部

▼

多重三角関数論

第4章
多重三角関数の歴史

本章では，多重三角関数の歴史をオイラー(1735年頃)，キンケリン(1860年)，ヘルダー(1886年)，新谷卓郎(1977年)の諸研究をたどりながら説明する．ただし，残念なことに，多重三角関数は，長い間，その名前も認識もなく研究されていた．名前を与えられたのは1980年代になって筆者が「多重三角関数(multiple sine function; multiple trigonometric function)」と呼ぶようになってからである．

4.1 オイラーの研究(1735年頃)

オイラーは三角関数 $\sin x$ について次のような性質を発見した：

(1) $\sin x = x \prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{n^2\pi^2}\right)$.

(2) $\sin(\pi x) = \frac{\pi}{\Gamma(x)\Gamma(1-x)}$.

(3) $\sin(x+\pi) = -\sin x$.

(4) $\sin(Nx) = 2^{N-1}\prod_{k=0}^{N-1}\sin\left(x+\frac{k\pi}{N}\right)$.

(5) $\prod_{k=1}^{N-1}\sin\left(\frac{k\pi}{N}\right) = \frac{N}{2^{N-1}}$.

これらは

$$S_1(x) = 2\sin(\pi x)$$

によって書き直すと次のようになることに注意しておこう：

(1*)　$S_1(x)=2\pi x \prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)$.

(2*)　$S_1(x)=\Gamma_1(x)^{-1}\Gamma_1(1-x)^{-1}$.

(3*)　$S_1(x+1)=-S_1(x)=S_1(x)S_0(x)^{-1}, \quad S_0(x)=-1$.

(4*)　$S_1(Nx)=\prod_{k=0}^{N-1} S_1\left(x+\frac{k}{N}\right)$.

(5*)　$\prod_{k=1}^{N-1} S_1\left(\frac{k}{N}\right)=N$.

オイラーの研究は常に驚きに充ちているが，三角関数における発見の数々もそうである．ここでは，高校の数学で扱える方法(オイラーの創案，1743 年；全集 I -14, p.143)によって説明しておこう．

定理 4.1.1(オイラー)　$N=2,3,4,\cdots$ に対して次が成り立つ．

(1)　$\sin x=N\sin\frac{x}{N}\prod_{k=1}^{N-1}\left(1-\frac{\sin^2\left(\frac{x}{2N}\right)}{\sin^2\left(\frac{k\pi}{2N}\right)}\right)$.

(2)　$\sum_{k=1}^{N-1}\frac{1}{\sin^2\left(\frac{k\pi}{2N}\right)}=\frac{2N^2-2}{3}$.

(3)　$\prod_{k=1}^{N-1}\sin\left(\frac{k\pi}{2N}\right)=\frac{\sqrt{N}}{2^{N-1}}$.

(4)　$\prod_{k=1}^{N-1}\sin\left(\frac{k\pi}{N}\right)=\frac{N}{2^{N-1}}$.

(5)　$\sin(Nx)=2^{N-1}\prod_{k=0}^{N-1}\sin\left(x+\frac{k\pi}{N}\right)$.　□

[証明]

(1)　まず

$$\begin{cases} \dfrac{\sin(2N\theta)}{N\sin(2\theta)} = P_N(\sin^2\theta), \\ \cos(2N\theta) = Q_N(\sin^2\theta) \end{cases}$$

となる 2 つの多項式

$$\begin{cases} P_N(x) = 1 - \dfrac{2N^2-2}{3}x + \cdots + (-1)^{N-1}\dfrac{2^{2N-2}}{N}x^{N-1}, \\ Q_N(x) = 1-2N^2x+\cdots+(-1)^N 2^{2N-1}x^N \end{cases}$$

が存在することが，N についての帰納法で示される．これは，加法定理を用いると

$$\begin{cases} P_{N+1}(x) = \dfrac{N}{N+1}P_N(x)(1-2x)+\dfrac{1}{N+1}Q_N(x), \\ Q_{N+1}(x) = Q_N(x)(1-2x)-NP_N(x)\cdot 4x(1-x) \end{cases}$$

となることからわかる．

すると，$k=1, \cdots, N-1$ に対して

$$P_N\left(\sin^2\left(\frac{k\pi}{2N}\right)\right) = \frac{\sin(k\pi)}{N\sin\left(\dfrac{k\pi}{N}\right)} = 0,$$

$$\sin^2\left(\frac{\pi}{2N}\right) < \sin^2\left(\frac{2\pi}{2N}\right) < \cdots < \sin^2\left(\frac{(N-1)\pi}{2N}\right)$$

であるので，

$$x = \sin^2\left(\frac{k\pi}{2N}\right) \qquad (k=1, \cdots, N-1)$$

は $N-1$ 次多項式 $P_N(x)$ の根になっていて，

$$P_N(x) = C\prod_{k=1}^{N-1}\left(1-\frac{x}{\sin^2\left(\dfrac{k\pi}{2N}\right)}\right)$$

と因数分解できる．ここで，C は定数であるが，$x=0$ において両辺を比較することによって，$C=1$ とわかる．よって

$$\frac{\sin(2N\theta)}{N\sin(2\theta)} = \prod_{k=1}^{N-1}\left(1-\frac{\sin^2\theta}{\sin^2\left(\dfrac{k\pi}{2N}\right)}\right)$$

を得る．ここで，$\theta=\dfrac{x}{2N}$ とおくと(1)となる．

(2)　(1)の証明により

$$\prod_{k=1}^{N-1}\left(1-\frac{x}{\sin^2\left(\dfrac{k\pi}{2N}\right)}\right)=P_N(x)$$

$$=1-\frac{2N^2-2}{3}x+\cdots+(-1)^{N-1}\frac{2^{2N-2}}{N}x^{N-1}$$

となっているので，x の係数を比較すると

$$\sum_{k=1}^{N-1}\frac{1}{\sin^2\left(\dfrac{k\pi}{2N}\right)}=\frac{2N^2-2}{3}$$

を得る．

(3)　(2)の証明において x^{N-1} の係数を比較すると

$$\prod_{k=1}^{N-1}\frac{1}{\sin^2\left(\dfrac{k\pi}{2N}\right)}=\frac{2^{2N-2}}{N}$$

となる．したがって

$$\prod_{k=1}^{N-1}\sin\left(\frac{k\pi}{2N}\right)=\frac{\sqrt{N}}{2^{N-1}}.$$

(4)　2 倍角の公式から

$$\prod_{k=1}^{N-1}\sin\left(\frac{k\pi}{N}\right)=\prod_{k=1}^{N-1}2\sin\left(\frac{k\pi}{2N}\right)\cos\left(\frac{k\pi}{2N}\right)$$

$$=2^{N-1}\prod_{k=1}^{N-1}\sin\left(\frac{k\pi}{2N}\right)\cdot\prod_{k=1}^{N-1}\cos\left(\frac{k\pi}{2N}\right)$$

であるが

$$\prod_{k=1}^{N-1}\cos\left(\frac{k\pi}{2N}\right)=\prod_{k=1}^{N-1}\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{k\pi}{2N}\right)$$

$$=\prod_{k=1}^{N-1}\sin\left(\frac{(N-k)\pi}{2N}\right)$$

$$=\prod_{k=1}^{N-1}\sin\left(\frac{k\pi}{2N}\right)$$

なので

$$\prod_{k=1}^{N-1}\sin\left(\frac{k\pi}{N}\right)=2^{N-1}\cdot\left(\prod_{k=1}^{N-1}\sin\left(\frac{k\pi}{2N}\right)\right)^2$$
$$\overset{(3)}{=}2^{N-1}\cdot\left(\frac{\sqrt{N}}{2^{N-1}}\right)^2$$
$$=\frac{N}{2^{N-1}}.$$

(5)　(1)を x の代りに Nx にして使うと

$$\sin(Nx)\overset{(1)}{=}N\sin x\prod_{k=1}^{N-1}\left(1-\frac{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{k\pi}{2N}\right)}\right)$$
$$\overset{(3)}{=}2^{2N-2}\sin x\prod_{k=1}^{N-1}\left(\sin^2\left(\frac{k\pi}{2N}\right)-\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)\right)$$

となる．ここで，等式

$$\sin^2\alpha-\sin^2\beta=\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)$$

を用いると

$$\sin(Nx)=2^{2N-2}\sin x\prod_{k=1}^{N-1}\sin\left(\frac{k\pi}{2N}+\frac{x}{2}\right)\sin\left(\frac{k\pi}{2N}-\frac{x}{2}\right)$$
$$=2^{2N-2}\sin x\prod_{k=1}^{N-1}\sin\left(\frac{k\pi}{2N}+\frac{x}{2}\right)\cdot\prod_{k=1}^{N-1}\sin\left(\frac{k\pi}{2N}-\frac{x}{2}\right)$$

となる．ここで，

$$\prod_{k=1}^{N-1}\sin\left(\frac{k\pi}{2N}-\frac{x}{2}\right)=\prod_{k=1}^{N-1}\cos\left(\frac{(N-k)\pi}{2N}+\frac{x}{2}\right)$$
$$=\prod_{k=1}^{N-1}\cos\left(\frac{k\pi}{2N}+\frac{x}{2}\right)$$

であるから

$$\sin(Nx)=2^{2N-2}\sin x\prod_{k=1}^{N-1}\sin\left(\frac{k\pi}{2N}+\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{k\pi}{2N}+\frac{x}{2}\right)$$
$$=2^{N-1}\sin x\prod_{k=1}^{N-1}\sin\left(\frac{k\pi}{N}+x\right)$$

$$= 2^{N-1} \prod_{k=0}^{N-1} \sin\left(x + \frac{k\pi}{N}\right)$$

となって，(5)を得る． [証明終]

応用を 3 つ述べよう．

応用 1

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

▯

[証明] 定理 4.1.1 の(2)の式

$$\sum_{k=1}^{N-1} \frac{1}{\sin^2\left(\dfrac{k\pi}{2N}\right)} = \frac{2N^2-2}{3}$$

を用いるとよい．まず，$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ に対して

$$0 < \sin\theta < \theta < \tan\theta$$

だから

$$\frac{1}{\tan^2\theta} < \frac{1}{\theta^2} < \frac{1}{\sin^2\theta},$$

つまり

$$\frac{1}{\sin^2\theta} - 1 < \frac{1}{\theta^2} < \frac{1}{\sin^2\theta}$$

となる．ここで，

$$\theta = \frac{k\pi}{2N} \qquad (k = 1, \cdots, N-1)$$

とおいて足すと

$$\frac{2N^2-2}{3} - (N-1) < \sum_{k=1}^{N-1} \frac{1}{\left(\dfrac{k\pi}{2N}\right)^2} < \frac{2N^2-2}{3},$$

つまり

$$\frac{\pi^2}{6}\left(1-\frac{3}{2N}+\frac{1}{2N^2}\right) < \sum_{k=1}^{N-1}\frac{1}{k^2} < \frac{\pi^2}{6}\left(1-\frac{1}{N^2}\right)$$

を得る．したがって，$N\to\infty$ とすれば

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}=\frac{\pi^2}{6}$$

となる．　[証明終]

応用 2

$$\sin x = x\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{k^2\pi^2}\right).$$

□

[証明]　定理 4.1.1 の(1)で $N\to\infty$ とすればよい．右辺において

$$\lim_{N\to\infty} N\sin\frac{x}{N}=x,$$

$$\lim_{N\to\infty}\frac{\sin^2\left(\dfrac{x}{2N}\right)}{\sin^2\left(\dfrac{k\pi}{2N}\right)}=\frac{x^2}{k^2\pi^2}$$

であることを用いる．[実際には，収束の様子をていねいに見る必要があるが，それは省略する．]　[証明終]

応用 3　単位円(半径1の円)に内接する正 N 角形 $P_0P_1\cdots P_{N-1}$ に対して次が成り立つ．

(1)　$\displaystyle\prod_{k=1}^{N-1}\overline{P_0P_k}=N.$

(2)　$\displaystyle\sum_{k=1}^{N-1}\frac{1}{\overline{P_0P_k}^2}=\frac{N^2-1}{12}.$

□

[証明]　P_k の座標を $\left(\cos\left(\dfrac{2k\pi}{N}\right),\sin\left(\dfrac{2k\pi}{N}\right)\right)$ としてよい．すると，線分 P_0P_k の長さは

$$\overline{P_0P_k}=2\sin\left(\frac{k\pi}{N}\right)$$

となることがわかる．よって，(1)は

$$\prod_{k=1}^{N-1} \sin\left(\frac{k\pi}{N}\right) = \frac{N}{2^{N-1}}$$

という定理4.1.1の(4)から導かれる．また，(2)は

$$\sum_{k=1}^{N-1} \frac{1}{\overline{P_0P_k}^2} = \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{N-1} \frac{1}{\sin^2\left(\frac{k\pi}{N}\right)}$$

において，2倍角の公式を用いることによって

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{N-1} \frac{1}{\overline{P_0P_k}^2} &= \frac{1}{16}\sum_{k=1}^{N-1} \frac{1}{\sin^2\left(\frac{k\pi}{2N}\right)}\cdot\frac{1}{\cos^2\left(\frac{k\pi}{2N}\right)} \\ &= \frac{1}{16}\sum_{k=1}^{N-1}\left(\frac{1}{\sin^2\left(\frac{k\pi}{2N}\right)}+\frac{1}{\cos^2\left(\frac{k\pi}{2N}\right)}\right) \\ &= \frac{1}{8}\sum_{k=1}^{N-1} \frac{1}{\sin^2\left(\frac{k\pi}{2N}\right)}\end{aligned}$$

となるので，定理4.1.1の(2)を使うと得られる．　[証明終]

注意　(1)には複素数を用いた次の別証もできる．

[別証]　複素平面において P_k を

$$\cos\left(\frac{2k\pi}{N}\right)+i\sin\left(\frac{2k\pi}{N}\right) = \exp\left(\frac{2k\pi}{N}i\right)$$

とする．このとき，2点間の距離は絶対値

$$\overline{P_0P_k} = \left|1-\exp\left(\frac{2k\pi}{N}i\right)\right|$$

によって与えられる．

一方，因数分解

$$x^N-1 = \prod_{k=0}^{N-1}\left(x-\exp\left(\frac{2k\pi}{N}i\right)\right)$$

より

$$\frac{x^N-1}{x-1} = \prod_{k=1}^{N-1}\left(x-\exp\left(\frac{2k\pi}{N}i\right)\right)$$

となるので，$x \to 1$ とすることにより

$$N = \prod_{k=1}^{N-1} \left(1 - \exp\left(\frac{2k\pi}{N} i\right)\right)$$

が得られる．よって，絶対値をとると

$$\begin{aligned} N &= \prod_{k=1}^{N-1} \left|1 - \exp\left(\frac{2k\pi}{N} i\right)\right| \\ &= \prod_{k=1}^{N-1} \overline{P_0 P_k} \end{aligned}$$

となる．　[別証終]

オイラーと三角関数の関連では，ゼータ関数の関係する側面を忘れてはならない．簡単に説明しておこう．

(A)　三角関数を用いて $\zeta(2), \zeta(4), \zeta(6), \cdots$ を計算(1735年)

オイラーは，応用1に，三角関数の有限和から計算した

$$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$$

だけでなく

$$\begin{aligned} \zeta(4) &= \frac{\pi^4}{90}, \\ \zeta(6) &= \frac{\pi^6}{945}, \\ \zeta(8) &= \frac{\pi^8}{9450}, \\ &\vdots \end{aligned}$$

など正の偶数における値を求めた．それは，応用2の無限積展開

$$\sin x = x \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2 \pi^2}\right)$$

の右辺を展開して

$$\sin x = x - \frac{1}{\pi^2} \left(\sum_n \frac{1}{n^2}\right) x^3 + \frac{1}{\pi^4} \left(\sum_{m<n} \frac{1}{m^2 n^2}\right) x^5 - \cdots$$

とし，ライプニッツによる展開(通常は"テイラー展開"と呼ばれる)

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \cdots$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

と比較するのである．すると

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6},$$

$$\sum_{m<n} \frac{1}{m^2 n^2} = \frac{\pi^4}{120}$$

などが求まる．したがって

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \right)^2 - 2 \sum_{m<n} \frac{1}{m^2 n^2}$$
$$= \left(\frac{\pi^2}{6} \right)^2 - 2 \frac{\pi^4}{120}$$
$$= \frac{\pi^4}{90}$$

となる．

もう少し，系統的に計算するためには

$$\sin(\pi x) = \pi x \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2} \right)$$

を対数微分した

$$\pi \cot(\pi x) = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{x-n} + \frac{1}{x+n} \right)$$
$$= \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2x}{x^2 - n^2}$$

を用いる．いま，$|x|<1$ とすると

$$\pi \cot(\pi x) = \frac{1}{x} - \frac{2}{x} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\frac{x^2}{n^2}}{1 - \frac{x^2}{n^2}}$$

$$= \frac{1}{x} - \frac{2}{x} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{x^2}{n^2} \right)^k$$
$$= \frac{1}{x} - \frac{2}{x} \sum_{k=1}^{\infty} \zeta(2k) x^{2k}$$

となって，$x=0$ におけるローラン展開が求まる．一方，

$$\begin{aligned} \pi \cot(\pi x) &= \pi \frac{\cos(\pi x)}{\sin(\pi x)} \\ &= i\pi \frac{e^{2\pi i x}+1}{e^{2\pi i x}-1} \\ &= i\pi + \frac{1}{x} \cdot \frac{2\pi i x}{e^{2\pi i x}-1} \end{aligned}$$

と変形して，ベルヌイ数 B_n の定義[§2.2]

$$\frac{x}{e^x-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} x^n$$

を用いると

$$\pi \cot(\pi x) = i\pi + \frac{1}{x} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} (2\pi i x)^n$$

となる．

このようにして，$\pi \cot(\pi x)$ の $x=0$ におけるローラン展開が2通り得られた．したがって，x^{2k-1} $(k=1,2,3,\cdots)$ の係数を見ることによって

$$-2\zeta(2k) = \frac{B_{2k}}{(2k)!} (2\pi i)^{2k}$$

がわかる．整理すると

$$\zeta(2k) = (-1)^{k-1} \frac{2^{2k-1} B_{2k}}{(2k)!} \pi^{2k}$$

となる．たとえば

$$B_2 = \frac{1}{6}, \quad B_4 = -\frac{1}{30}, \quad B_6 = \frac{1}{42}, \quad B_8 = -\frac{1}{30},$$
$$B_{10} = \frac{5}{66}, \quad B_{12} = -\frac{691}{2730}, \quad \cdots$$

から

$$\zeta(2)=\frac{\pi^2}{6},\quad \zeta(4)=\frac{\pi^4}{90},\quad \zeta(6)=\frac{\pi^6}{945},\quad \zeta(8)=\frac{\pi^8}{9450},$$
$$\zeta(10)=\frac{\pi^{10}}{93555},\quad \zeta(12)=\frac{691\pi^{12}}{638512875},\ \cdots$$

となる．

なお，上記のローラン展開の計算を $\cot x$ のローラン展開にしてまとめておくと，

$$\begin{aligned}\cot x &= \frac{1}{x}-2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\zeta(2n)}{\pi^{2n}}x^{2n-1}\\ &= \frac{1}{x}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2^{2n}B_{2n}}{(2n)!}x^{2n-1}\end{aligned}$$

ということになる．これは，三角関数とゼータ関数の関係が見やすく表れている式である．

(B) 三角関数を用いた $\boldsymbol{\zeta(s)}$ と $\boldsymbol{\zeta(1-s)}$ の関数等式(1749年)

オイラーは，(A)のようにして

$$\zeta(2)=\frac{\pi^2}{6},\quad \zeta(4)=\frac{\pi^4}{90},\quad \zeta(6)=\frac{\pi^6}{945},\ \cdots$$

を得，さらに，

$$\zeta(-1)=-\frac{1}{12},\quad \zeta(-3)=\frac{1}{120},\quad \zeta(-5)=-\frac{1}{252},\ \cdots$$

を発散級数のうまい計算方法(オイラー総和法)によって求め(結果は§2.2と一致)，洞察力により

$$\zeta(1-s)=\zeta(s)\cdot 2(2\pi)^{-s}\Gamma(s)\cos\left(\frac{\pi s}{2}\right)$$

という関数等式 $\zeta(1-s)\longleftrightarrow\zeta(s)$ を発見した．[証明は，解析接続も含めてリーマンが1859年に与えた.]

実際，$s=2,4,6,\cdots$ を代入すると

$$\zeta(-1)=\zeta(2)\cdot\left(-\frac{\pi^2}{2}\right),$$

$$\zeta(-3) = \zeta(4)\cdot\left(\frac{3\pi^4}{4}\right),$$

$$\zeta(-5) = \zeta(6)\cdot\left(-\frac{5\pi^6}{4}\right)$$

$$\vdots$$

となっていることがわかる．さらに，$s=3,5,7,\cdots$ を代入すると，$\cos\left(\frac{\pi s}{2}\right)=0$ となることから

$$\zeta(-2) = 0, \quad \zeta(-4) = 0, \quad \zeta(-6) = 0, \ \cdots$$

ときちんと合っていることもわかる．つまり，リーマン・ゼータ関数 $\zeta(s)$ の負の偶数における零点は三角関数の零点と判明したのである．

オイラーの研究は，一般化されたゼータ関数 $Z(s)$ のときに関数等式

$$Z(\alpha - s) = Z(s)^{\pm 1} T(s)$$

における“三角因子 $T(s)$”（通常は“ガンマ因子”と呼ばれる）を求める問題へと導く．まったく同様に，一般化されたガンマ関数 $G(x)$ に対して“関数等式”

$$G(\beta - x) = G(x)^{\pm 1} S(x)$$

における“三角因子 $S(x)$”が，これから調べていく一般化された三角関数である．さらに，「ゼータ関数とガンマ関数の一致を三角関数から統制する」という第Ⅲ部における統一理論もオイラーの思想圏と見えよう．

4.2　キンケリンの研究（1860年）

キンケリンは論文

H. Kinkelin, “Ueber eine mit der Gammafunction vervandte Transcendente und deren Anwendung auf die Integralrechnung”, *Crelle J.*, **57** (1860), 122–138

において，ある種の2重ガンマ関数 $G^{\mathrm{K}}(x)$ を研究した．

これは

$$G^{\mathrm{K}}(x+1) = G^{\mathrm{K}}(x)x^x$$

が成立するものであって，$G^{\mathrm{K}}(1)=1$,

$$G^{\mathrm{K}}(n+1) = 1^1 \cdot 2^2 \cdot \cdots \cdot n^n$$

となる．この状況は $\Gamma(x)$ の性質

$$\Gamma(x+1) = \Gamma(x)x,$$
$$\Gamma(1) = 1,$$
$$\Gamma(n+1) = 1 \cdot 2 \cdot \cdots \cdot n = n!$$

に対する自然な類似物と考えることができる．

さらに，キンケリンは定積分

$$\int_0^x t \cdot \tan(\pi t)dt, \quad \int_0^x t \cdot \cot(\pi t)dt$$

を $\log G^{\mathrm{K}}(x)$ によって表示している．

このキンケリンの研究はガンマ関数の多重版構成への最初の研究と言える．次のヘルダーの研究(1886 年)からわかるように，キンケリンは 2 重三角関数の一歩手前まで接近していたのである．

さて，われわれの多重ガンマ関数

$$\Gamma_r(x) = \Gamma_r(x, (1, \cdots, 1))$$

を用いて書くと

$$G^{\mathrm{K}}(x) = \Gamma_2(x)\Gamma_1(x)^{x-1}e^{-\zeta'(-1)}$$

となっている．

練習問題

関数

$$G(x) = \Gamma_2(x)\Gamma_1(x)^{x-1}e^{-\zeta'(-1)}$$

が次の性質をもつことを証明せよ．

(1) $G(x+1)=G(x)x^x$.

(2) $G(1)=1$.

(3) $G(n+1)=1^1\cdot 2^2\cdot\cdots\cdot n^n \qquad (n=1,2,3,\cdots)$.

[解答]

(1) $G(x+1)=\Gamma_2(x+1)\Gamma_1(x+1)^x e^{-\zeta'(-1)}$

において，周期性

$$\Gamma_2(x+1)=\Gamma_2(x)\Gamma_1(x)^{-1},$$
$$\Gamma_1(x+1)=\Gamma_1(x)\Gamma_0(x)^{-1},$$
$$\Gamma_0(x)=\frac{1}{x},$$

を用いることにより

$$\begin{aligned} G(x+1) &= \Gamma_2(x)\Gamma_1(x)^{-1}\Gamma_1(x)^x x^x e^{-\zeta'(-1)} \\ &= \Gamma_2(x)\Gamma_1(x)^{x-1}e^{-\zeta'(-1)}\cdot x^x \\ &= G(x)x^x. \end{aligned}$$

(2) $G(1)=\Gamma_2(1)e^{-\zeta'(-1)}$

であるから

$$\Gamma_2(1)=\exp\left(\frac{d}{ds}\zeta_2(s,1,(1,1))\Big|_{s=0}\right)$$

を求めればよい．ここで，

$$\begin{aligned} \zeta_2(s,1,(1,1)) &= \sum_{n_1,n_2\geqq 0}(n_1+n_2+1)^{-s} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+1)^{-s} \\ &= \zeta(s-1) \end{aligned}$$

だから

$$\Gamma_2(1)=e^{\zeta'(-1)}.$$

よって

$$G(1) = 1.$$

(3)　(1)より

$$G(n+1) = G(n)n^n$$

なので，これを繰り返し使うと

$$G(n+1) = G(1)\cdot 1^1\cdot 2^2\cdot 3^3\cdot \cdots \cdot n^n$$

となり，(2)を用いると

$$G(n+1) = 1^1\cdot 2^2\cdot \cdots \cdot n^n$$

がわかる．　[解答終]

ところで，キンケリンは，少なくとも現在では有名でない数学者である(対照的に，次に出てくるヘルダーはとても有名である)．たとえば，日本数学会編『数学辞典第 4 版』(岩波書店，2007 年)にもキンケリンの名前は出てきていない．しかしながら，多重三角関数論から見ると，その端緒に近づいた，とりわけ重要な数学者であるので，ここでちょっと時間をとって 1860 年の論文[現在では DigiZeitschriften のウェブサイトから PDF が無料でダウンロードできる：なお，*Crelle J.*, **57** (1860)の正式名称は Journal für die reine und angewandte Mathematik, **57** (1860)]を読んでみよう．

ヘルマン・キンケリン(Hermann Kinkelin)はスイスの数学者であり，1832 年 11 月 11 日にベルンに生まれ，1913 年 1 月 2 日にバーゼルで歿している．今から 153 年前の論文(投稿の 1856 年 7 月という記録からすると書かれてから 157 年経っている)を，ちょうど歿後 100 年の今年(2013 年)にたどるのは歴史的な興味も少しはあるかと思うのである．

キンケリンは，論文 125 ページ(式(9))にて

$$G(x) = \lim_{N\to\infty} \frac{1^1 2^2 \cdots N^N \cdot N^{N(x-1)+\frac{x(x-1)}{2}}}{x^x (x+1)^{x+1} \cdots (x+N-1)^{x+N-1}} e^{\frac{x(x-1)}{2}}$$

として $G(x)$ (これが論文での記号；上では $G^{\mathrm{K}}(x)$ とキンケリンの K を

付けておいた)を導入している．これからただちに

$$G(1)=1,$$
$$G(x+1)=G(x)x^x \qquad (論文 125 ページ，式(10)),$$
$$G(n+1)=1^1 2^2 \cdots n^n \qquad (論文 126 ページ，式(11)),$$

がわかる．そして

$$(☆)\quad G(x)=\lim_{N\to\infty}\frac{1^1 2^2\cdots N^N e^{\frac{x(x-1)}{2}+N(x-1)}}{(2\pi)^{\frac{x-1}{2}}N^{\frac{(x-1)^2}{2}}x^1(x+1)^2\cdots(x+N-1)^N}\Gamma(x)^{x-1}$$

(論文 126 ページ，式(12))や

$$G(1+x)G(1-x)$$
$$=\left\{\frac{\Gamma(1+x)^2\sin(\pi x)}{\pi x}\right\}^x$$
$$\times\lim_{N\to\infty}\frac{e^{x^2}}{N^{x^2}\left(1-\frac{x^2}{1^2}\right)^1\left(1-\frac{x^2}{2^2}\right)^2\cdots\left(1-\frac{x^2}{N^2}\right)^N}$$

(論文 126 ページ，式(13))などを得ている．

さらに，終りに近い論文 135 ページでは定積分

$$\int_0^x \pi t\cdot\cot(\pi t)dt=\log\left(\frac{G(x)}{G(1-x)}(2\sin(\pi x))^x\right)$$

を得ている．われわれが，とくに興味を魅かれるのは，この定積分である．いま，右辺の対数の中を計算してみよう．それは，あまり難しくはないのであるが，キンケリンは行なっていないし，その後もこれまで書かれた文献がなかったので，ていねいに書いておこう．

まず

$$G(x)=G(1+x)x^{-x}$$

と変形して，$G(1+x)$ に表示(☆)を用いると

$$G(x)=\lim_{N\to\infty}\frac{1^1 2^2\cdots N^N\cdot e^{\frac{x(x+1)}{2}+Nx}\Gamma(x+1)^x x^{-x}}{(2\pi)^{\frac{x}{2}}N^{\frac{x^2}{2}}(1+x)^1(2+x)^2\cdots(N+x)^N}$$

$$= \frac{\Gamma(x)^x e^{\frac{x(x+1)}{2}}}{(2\pi)^{\frac{x}{2}}} \lim_{N\to\infty} \frac{1^1 2^2 \cdots N^N \cdot e^{Nx}}{N^{\frac{x^2}{2}}(1+x)^1(2+x)^2\cdots(N+x)^N}$$

となる．同様に，$G(1-x)$ に表示(☆)を用いて

$$G(1-x) = \frac{\Gamma(1-x)^{-x} e^{\frac{x(x-1)}{2}}}{(2\pi)^{-\frac{x}{2}}} \lim_{N\to\infty} \frac{1^1 2^2 \cdots N^N \cdot e^{-Nx}}{N^{\frac{x^2}{2}}(1-x)^1(2-x)^2\cdots(N-x)^N}$$

を得る．よって

$$\frac{G(x)}{G(1-x)} = \frac{\Gamma(x)^x \Gamma(1-x)^x}{(2\pi)^x} e^x \lim_{N\to\infty} \left\{ \prod_{n=1}^{N} \left(\frac{n-x}{n+x} \right)^n \right\} e^{2Nx}$$

となる．ここで

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma(x)^x \Gamma(1-x)^x}{(2\pi)^x} &= \left(\frac{\pi}{\sin(\pi x)} \right)^x (2\pi)^{-x} \\ &= (2\sin(\pi x))^{-x} \end{aligned}$$

であるから

$$\begin{aligned} \frac{G(x)}{G(1-x)}(2\sin(\pi x))^x &= e^x \lim_{N\to\infty} \prod_{n=1}^{N} \left\{ \left(\frac{1-\frac{x}{n}}{1+\frac{x}{n}} \right)^n e^{2x} \right\} \\ &= e^x \prod_{n=1}^{\infty} \left\{ \left(\frac{1-\frac{x}{n}}{1+\frac{x}{n}} \right)^n e^{2x} \right\}, \end{aligned}$$

つまり

$$\int_0^x \pi t \cdot \cot(\pi t) dt = \log \left(e^x \prod_{n=1}^{\infty} \left\{ \left(\frac{1-\frac{x}{n}}{1+\frac{x}{n}} \right)^n e^{2x} \right\} \right)$$

という結論に到着する．この計算はキンケリンの論文のやさしい部分程度であり，先にあげた $G(1+x)G(1-x)$ (論文 126 ページ，式(13))という 2 つの積の代りに商をとったことにあたる．

キンケリンが，ここまで計算していたら，歴史は，やや変わったかもし

れない．実際には，キンケリンが論文を書きあげた1856年7月から，次のヘルダーの1886年の論文まで，ちょうど30年かかっている．

ヘルダーの仕事に行く前に，キンケリンについて，もう少しおつきあい願いたい．キンケリンの論文には，至るところでオイラーのガンマ関数 $\Gamma(x)$ について知られていた次のような性質を比較対照のためにあげてある：

(A) $\Gamma(x)=\lim_{N\to\infty}\dfrac{1\cdot 2\cdot\cdots\cdot N\cdot N^{x-1}}{x(x+1)\cdots(x+N-1)}$.

(B) $\Gamma(x+1)=\Gamma(x)x$.

(C) $\Gamma(n+1)=1\cdot 2\cdot 3\cdot\cdots\cdot n=n!$.

(D) $\lim_{n\to\infty}\dfrac{\Gamma(n+1)}{n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}}=\sqrt{2\pi}$.　　［スターリングの公式］

(E) $\Gamma(Nx)=\prod_{k=0}^{N-1}\Gamma\left(x+\dfrac{k}{N}\right)\times N^{Nx-\frac{1}{2}}\times(\sqrt{2\pi})^{-(N-1)}$.

［N 倍角の公式］

練習問題

N 倍角の公式(E)を証明せよ．

［解答］ §3.6において証明した

$$\Gamma_1(Nx)=\prod_{k=0}^{N-1}\Gamma_1\left(x+\frac{k}{N}\right)\times N^{-\zeta(0,Nx)}$$

を使う．ここで，

$$\Gamma_1(x)=\frac{\Gamma(x)}{\sqrt{2\pi}}$$

および

$$\zeta(0,Nx)=\frac{1}{2}-Nx$$

であることを用いれば

$$\frac{\Gamma(Nx)}{\sqrt{2\pi}} = \prod_{k=0}^{N-1} \frac{\Gamma\left(x+\frac{k}{N}\right)}{\sqrt{2\pi}} \times N^{Nx-\frac{1}{2}}$$

となるので(E)を得る.　[解答終]

キンケリンは(A)～(E)の対応物を次のように示した：

(A*) $G(x) = \lim_{N\to\infty} \frac{1^1 \cdot 2^2 \cdot \cdots \cdot N^N \cdot N^{N(x-1)+\frac{x(x-1)}{2}}}{x^x(x+1)^{x+1} \cdots (x+N-1)^{x+N-1}} e^{\frac{x(x-1)}{2}}$.

(B*) $G(x+1) = G(x)x^x$.

(C*) $G(n+1) = 1^1 \cdot 2^2 \cdot 3^3 \cdot \cdots \cdot n^n$.

(D*) $\lim_{n\to\infty} \frac{G(n+1)}{n^{\frac{n^2+n}{2}+\frac{1}{12}} e^{-\frac{n^2}{4}+\frac{1}{12}}} = \sqrt{\varpi}$.

(E*) $G(Nx) = \prod_{k=0}^{N-1} G\left(x+\frac{k}{N}\right)^N \times N^{\frac{Nx(Nx-1)}{2}+\frac{1}{12}} \times (\sqrt{\varpi})^{-(N^2-1)}$.

ここで,

$$\log\sqrt{\varpi} = -\frac{1}{24} + \frac{\gamma}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\zeta(2n+1)-1}{(2n+1)(2n+3)}.$$

記号 ϖ(パイ)は $\Gamma(x)$ のときの 2π に当たるものと考えて使っているようだ. キンケリンは

$$\log\varpi = 0.33084228,$$

$$\varpi = 1.392140$$

と近似値を計算している.

実は

$$\sqrt{\varpi} = e^{-\zeta'(-1)}$$

と簡明な表示ができて

$$\sqrt{2\pi} = e^{-\zeta'(0)}$$

と見事に対比できるのであるが, キンケリンが論文を書いた1856年7

月頃には，$\zeta(s)$ の解析接続も（少なくとも公式には）知られていなかった——リーマンの有名な論文は1859年11月である——という時代背景から無理である．

さらに，ϖ が出てきている裏には，$G(x)$ について触れていなかったキンケリンの考察があった．キンケリンは $G(x)$ を

$$G(x)=\exp\left(\int_0^x \log\Gamma(t)dt+\frac{x(x-1)}{2}-\frac{x}{2}\log(2\pi)\right)$$

という積分から出発して研究したのである．それは，キンケリンが引用しているラーベの1844年の論文

J.L. Raabe, "Angenäherte Bestimmung der Function

$$\Gamma(1+n)=\int_0^\infty x^n e^{-x}dx,$$

wenn n eine ganze, gebrochene, order incommensurable sehr grosse positive Zahl ist", *Crelle J.*, **28** (1844), 10–18

がきっかけのようである．

ラーベ(Joseph Ludwig Raabe, 1801年5月15日-1859年1月22日；スイスのチューリヒで歿)は，キンケリンと同じくスイスに住んでいた．ラーベは，その論文で

$$\int_0^1 \log\Gamma(t+x)dt = x\log x - x + \frac{1}{2}\log(2\pi),$$

つまり

$$\int_x^{x+1} \log\Gamma(t)dt = x\log x - x + \frac{1}{2}\log(2\pi)$$

を示していた．とくに $x=0$ のときには次の通り：

(F) $\displaystyle\int_0^1 \log\Gamma(t)dt=\log(\sqrt{2\pi}).$　　**[ラーベの公式]**

[実は，ラーベのこの論文は「第2部」であり，(F)は *Crelle J.*, **25**(1843)に出た「第1部」に入っていた．]

このラーベの結果から，

$$\log\frac{G(x+1)}{G(x)}=\log G(x+1)-\log G(x)$$
$$=\int_x^{x+1}\log\Gamma(t)dt+x-\frac{1}{2}\log(2\pi)$$
$$=x\log x$$

となる．よって，

$$G(x+1)=G(x)x^x$$

が見やすい．また，

$$G(1)=\exp\left(\int_0^1\log\Gamma(t)dt-\frac{1}{2}\log(2\pi)\right)=1$$

はラーベの公式(F)そのものである．すると

$$G(n+1)=1^1\cdot 2^2\cdot\cdots\cdot n^n$$

もわかる．さらに，キンケリンはラーベの公式の対応物

(F*) $\displaystyle\int_0^1\log G(t)dt=\log(\sqrt{\varpi})$

も示している．

先に触れた重要な定積分

$$\int_0^x\pi t\cdot\cot(\pi t)dt=\log\left(\frac{G(x)}{G(1-x)}(2\sin(\pi x))^x\right)$$

をどのように計算したかについても述べておこう．まず，部分積分によって

$$\int_0^x\pi t\cdot\cot(\pi t)dt=[t\cdot\log(\sin\pi t)]_0^x-\int_0^x\log(\sin\pi t)dt$$
$$=x\cdot\log(\sin\pi x)-\int_0^x\log(\sin\pi t)dt$$

となる．よって，

$$\int_0^x\log(\sin\pi t)dt=\log\left(\frac{G(1-x)}{2^xG(x)}\right)$$

となることを示せばよい．

そこで，オイラーの式

$$\sin \pi t = \frac{\pi}{\Gamma(t)\Gamma(1-t)}$$

を使って

$$\log(\sin \pi t) = \log \pi - \log \Gamma(t) - \log \Gamma(1-t)$$

と変形すると

$$\int_0^x \log(\sin \pi t)dt = x \log \pi - \int_0^x \log \Gamma(t)dt - \int_0^x \log \Gamma(1-t)dt$$

となる．ここで，

$$\int_0^x \log \Gamma(t)dt = \log G(x) - \frac{x(x-1)}{2} + \frac{x}{2}\log(2\pi),$$

$$\begin{aligned}\int_0^x \log \Gamma(1-t)dt &= -\int_1^{1-x} \log \Gamma(t)dt \\ &= -\int_0^{1-x} \log \Gamma(t)dt + \int_0^1 \log \Gamma(t)dt \\ &\overset{(\mathrm{F})}{=} -\log G(1-x) - \frac{x(x-1)}{2} + \frac{x}{2}\log(2\pi)\end{aligned}$$

であるから，希望通り

$$\begin{aligned}\int_0^x \log(\sin \pi t)dt &= -\log G(x) + \log G(1-x) - x\log 2 \\ &= \log\left(\frac{G(1-x)}{2^x G(x)}\right)\end{aligned}$$

を得ることができた．

キンケリンは，論文のはじめの部分で，さらに高次のガンマ関数についても触れている．それは，前の論文

H. Kinkelin, “Untersuchung über die Formel

$$nF(nx) = f(x) + f\left(x+\frac{1}{n}\right) + f\left(x+\frac{2}{n}\right) + \cdots + f\left(x+\frac{n-1}{n}\right)\text{''},$$

Archiv der Mathematik und Physik, **22** (1854), 189–224

に述べてあったものである．現代的な目で見ると r 次ガンマ関数は

$$G_r^{\mathrm{K}}(x)=\exp\left(\frac{\partial}{\partial s}\zeta(s,x)\bigg|_{s=1-r}-\zeta'(1-r)\right)$$

であると言いたかったのだろうと考えられる．こうすると，$G_1^{\mathrm{K}}(x)$ はオイラーの $\Gamma(x)$ であり，$G_2^{\mathrm{K}}(x)$ がキンケリンの $G^{\mathrm{K}}(x)=G(x)$ になる．

練習問題

$G_r^{\mathrm{K}}(x)$ に対して次を示せ．

(1) $G_r^{\mathrm{K}}(x+1)=G_r^{\mathrm{K}}(x)x^{x^{r-1}}$.

(2) $G_r^{\mathrm{K}}(1)=1$.

(3) $G_r^{\mathrm{K}}(n+1)=1^{1^{r-1}}2^{2^{r-1}}3^{3^{r-1}}\cdots n^{n^{r-1}}$.

[解答]

(1) $\zeta(s,x+1)=\zeta(s,x)-x^{-s}$

より

$$\frac{\partial}{\partial s}\zeta(s,x+1)\bigg|_{s=1-r}=\frac{\partial}{\partial s}\zeta(s,x)\bigg|_{s=1-r}+x^{r-1}\log x.$$

これから(1)がわかる．

(2) $\zeta(s,1)=\zeta(s)$ だから

$$G_r^{\mathrm{K}}(1)=\exp(\zeta'(1-r)-\zeta'(1-r))=1.$$

(3)

$$\begin{aligned}G_r^{\mathrm{K}}(n+1)&\overset{(1)}{=}G_r^{\mathrm{K}}(n)n^{n^{r-1}}\\&\overset{(1)}{=}G_r^{\mathrm{K}}(1)1^{1^{r-1}}\cdots n^{n^{r-1}}\\&\overset{(2)}{=}1^{1^{r-1}}\cdots n^{n^{r-1}}.\end{aligned}$$

[解答終]

キンケリンの論文は類似・拡張によって数学研究を行なう際に模範となり，未来へも光を与えている楽しい論文なので精読をすすめたい．そして，何をやりたかったのかを考えてみて欲しい．『古人の求むるところを求むな，古人の求めんとしたところを求めよ』とは数学研究にピッタリの言葉である．

さて，だいぶ寄り道をしたようである．このへんで引き返して多重三角

関数の歴史をたどる道を急ごう．

4.3　ヘルダーの研究(1886年)

ヘルダー(Otto Hölder, 1859–1937)は1886年の論文

O. Hölder, "Ueber eine transcendente Function", *Göttingen Nachrichten* (1886), 514-522

において関数

$$F(x) = e^x \frac{\prod_{n=1}^{\infty}\left\{\left(1-\frac{x}{n}\right)^n e^{x+\frac{x^2}{2n}}\right\}}{\prod_{n=1}^{\infty}\left\{\left(1+\frac{x}{n}\right)^n e^{-x+\frac{x^2}{2n}}\right\}} = e^x \prod_{n=1}^{\infty}\left\{\left(\frac{1-\frac{x}{n}}{1+\frac{x}{n}}\right)^n e^{2x}\right\}$$

から出発する．記号もヘルダーの通りである．つまり，前節で説明したように，キンケリンの結論から出発する形になる．ヘルダーはキンケリンの論文ばかりでなく，関係しそうな先行研究も引用していない．これは，ヘルダーが27歳の頃の9頁という長くない論文であるが，多重三角関数論の最初を飾る論文と言える．[この論文も *DigiZeitschriften* のウェブからPDFが無料でダウンロードできる．ただし，*Göttingen Nachrichten* の正式名称はNachrichten von der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften und der Georg-Augusts-Universität zu Göttingen … ととても長いので注意.]

ヘルダーは，この論文において次のことを証明した．

定理 4.3.1

(1) $\frac{F'(x)}{F(x)} = \pi x \cot(\pi x)$.

(2) $F(-x) = F(x)^{-1}$.

(3) $F(x+1) = -2\sin(\pi x)F(x)$.

(4)　$F(x)F(1-x)=2\sin(\pi x)$.

(5)　$F\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{2}$.

(6)　$k=0,1,2,\cdots$ に対して

$$\begin{cases} F\left(2k+\frac{1}{2}\right) = (-1)^k 2^{2k}\sqrt{2}, \\ F\left(2k+\frac{3}{2}\right) = (-1)^{k+1}2^{2k+1}\sqrt{2}. \end{cases}$$

(7)

$$F(Nx) = 2^{-\frac{N(N-1)}{2}} \frac{\left\{F(x)F\left(x+\frac{1}{N}\right)\cdots F\left(x+\frac{N-1}{N}\right)\right\}^N}{\sin\pi\left(x+\frac{1}{N}\right)\sin^2\pi\left(x+\frac{2}{N}\right)\cdots\sin^{N-1}\pi\left(x+\frac{N-1}{N}\right)}.$$

(8)　$\prod_{k=1}^{N-1} F\left(\frac{k}{N}\right)=\sqrt{N}$.

(9)　$\left|1-e^{-2\pi ix}\right|<1$ に対して

$$F(x) = \exp\left(\frac{\pi ix^2}{2}+\frac{1}{2\pi i}\mathrm{Li}_2(1-e^{-2\pi ix})\right).$$

ただし，

$$\mathrm{Li}_2(u) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{u^n}{n^2}.$$

□

［証明］

(1)

$$\log F(x) = x+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{n\log\left(1-\frac{x}{n}\right)-n\log\left(1+\frac{x}{n}\right)+2x\right\}$$

であるから，微分して

$$\frac{F'(x)}{F(x)} = 1+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{x-n}-\frac{n}{x+n}+2\right)$$

$$= 1+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n^2}{x^2-n^2}+2\right)$$
$$= 1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2x^2}{x^2-n^2}$$
$$= x\left\{\frac{1}{x}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2x}{x^2-n^2}\right\}$$

となるが，

$$\pi\cot(\pi x) = \frac{1}{x}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2x}{x^2-n^2}$$

を用いて(§4.1 参照)

$$\frac{F'(x)}{F(x)} = \pi x\cot(\pi x)$$

となる．

(2)

$$F(-x) = e^{-x}\prod_{n=1}^{\infty}\left\{\left(\frac{1+\frac{x}{n}}{1-\frac{x}{n}}\right)^n e^{-2x}\right\}$$

であるので

$$F(-x) = F(x)^{-1}.$$

(3)　両辺を対数微分(対数をとって微分)して比較する．左辺の対数微分は(1)により

$$\frac{F'(x+1)}{F(x+1)} = \pi(x+1)\cot\pi(x+1)$$
$$= \pi x\cot(\pi x)+\pi\cot(\pi x)$$

となる．一方，右辺の対数微分は

$$\pi\cot(\pi x)+\frac{F'(x)}{F(x)} = \pi\cot(\pi x)+\pi x\cot(\pi x)$$

である．よって，左辺と右辺の対数微分は一致するので，ある定数 C により

$$F(x+1) = C\sin(\pi x)F(x)$$

となる．C を求めるには次のようにする．まず，

$$\frac{F(x+1)}{x} = C\cdot\frac{\sin(\pi x)}{x}\cdot F(x)$$

とし，$F(0)=1$, $F(1)=0$ に注意すると，$x\to 0$ として

$$F'(1) = C\pi,$$

つまり

$$C = \frac{F'(1)}{\pi}$$

となる．さて，

$$\begin{aligned} F_N(x) &= e^x \prod_{n=1}^{N}\left\{\left(\frac{1-\dfrac{x}{n}}{1+\dfrac{x}{n}}\right)^n e^{2x}\right\} \\ &= e^{(2N+1)x}\prod_{n=1}^{N}\left(\frac{n-x}{n+x}\right)^n \end{aligned}$$

とおくと，$F(x)$ は

$$F(x) = \lim_{N\to\infty} F_N(x)$$

と書ける．ここで，

$$\begin{aligned} F_N(x) &= e^{(2N+1)x}\frac{(1-x)^1(2-x)^2\cdots(N-x)^N}{(1+x)^1(2+x)^2\cdots(N+x)^N} \\ &= (1-x)e^{(2N+1)x}\frac{(2-x)^2\cdots(N-x)^N}{(1+x)^1(2+x)^2\cdots(N+x)^N} \end{aligned}$$

であるから

$$\begin{aligned} F_N'(1) &= -e^{2N+1}\frac{1^2 2^3\cdots(N-1)^N}{2^1 3^2\cdots(N+1)^N} \\ &= -e^{2N+1}N^{-2N-1}(N!)^2\left(1+\frac{1}{N}\right)^{-N} \end{aligned}$$

$$= -\left(\frac{N!}{N^{N+\frac{1}{2}}e^{-N}}\right)^2 e\left(1+\frac{1}{N}\right)^{-N}$$

においてスターリングの公式

$$\lim_{N\to\infty}\frac{N!}{N^{N+\frac{1}{2}}e^{-N}} = \sqrt{2\pi},$$

および

$$\lim_{N\to\infty}\left(1+\frac{1}{N}\right)^{-N} = \frac{1}{e}$$

を用いると

$$F'(1) = \lim_{N\to\infty} F_N'(1) = -2\pi$$

と求まる．したがって，$C=-2$ であり，(3)が成り立つ．

(4)　(3)より

$$F(1-x) = 2\sin(\pi x)F(-x)$$

であるから

$$F(x)F(1-x) = 2\sin(\pi x)F(x)F(-x)$$

となり，(2)を用いると

$$F(x)F(1-x) = 2\sin(\pi x)$$

を得る．

(5)

$$F\left(\frac{1}{2}\right) = e^{\frac{1}{2}}\prod_{n=1}^{\infty}\left\{\left(\frac{2n-1}{2n+1}\right)^n e\right\} > 0$$

である．よって，(4)を $x=\dfrac{1}{2}$ として用いて

$$F\left(\frac{1}{2}\right)^2 = 2\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$$

から

$$F\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{2}$$

とわかる.

(6) これは(5)と(3)を繰り返し使えばよい. たとえば

$$\begin{aligned}F\left(\frac{3}{2}\right)&=F\left(\frac{1}{2}+1\right)\\&\overset{(3)}{=}-2\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)F\left(\frac{1}{2}\right)\\&\overset{(5)}{=}-2\sqrt{2},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}F\left(\frac{5}{2}\right)&=F\left(\frac{3}{2}+1\right)\\&\overset{(3)}{=}-2\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)F\left(\frac{3}{2}\right)\\&=2(-2\sqrt{2})\\&=-2^2\sqrt{2}.\end{aligned}$$

(7) 両辺の対数微分を比較すると一致することがわかるので, ある定数 C((3)のときとは別のもの)によって,

$$F(Nx)=C\frac{\prod_{k=0}^{N-1}F\left(x+\frac{k}{N}\right)^N}{\prod_{k=1}^{N-1}\sin^k\left(\pi\left(x+\frac{k}{N}\right)\right)}$$

となる. ここで $x=0$ とおくと, $F(0)=1$ より

$$1=C\prod_{k=1}^{N-1}\frac{F\left(\frac{k}{N}\right)^N}{\sin^k\left(\frac{\pi k}{N}\right)}.$$

よって

$$C=\prod_{k=1}^{N-1}\frac{\sin^k\left(\frac{\pi k}{N}\right)}{F\left(\frac{k}{N}\right)^N}$$

は正の数とわかる．さらに

$$C^2=\prod_{k=1}^{N-1}\frac{\sin^k\left(\frac{\pi k}{N}\right)\sin^{N-k}\left(\frac{\pi(N-k)}{N}\right)}{F\left(\frac{k}{N}\right)^N F\left(\frac{N-k}{N}\right)^N}$$

となる（$k=1,\cdots,N-1$ のとき，$N-k=N-1,\cdots,1$ である）．

そこで，

$$\sin^k\left(\frac{\pi k}{N}\right)\sin^{N-k}\left(\frac{\pi(N-k)}{N}\right)=\sin^N\left(\frac{\pi k}{N}\right),$$

$$F\left(\frac{k}{N}\right)^N F\left(\frac{N-k}{N}\right)^N \overset{(4)}{=} 2^N\sin^N\left(\frac{\pi k}{N}\right)$$

を用いると

$$\begin{aligned}C^2&=\prod_{k=1}^{N-1}\frac{1}{2^N}\\&=2^{-N(N-1)}\end{aligned}$$

となる．よって

$$C=2^{-\frac{N(N-1)}{2}}$$

と求まる．

(8)

$$\begin{aligned}\left(\prod_{k=1}^{N-1}F\left(\frac{k}{N}\right)\right)^2&=\prod_{k=1}^{N-1}F\left(\frac{k}{N}\right)F\left(\frac{N-k}{N}\right)\\&\overset{(4)}{=}\prod_{k=1}^{N-1}2\sin\left(\frac{k\pi}{N}\right)\\&\overset{\S 4.1}{=}N.\end{aligned}$$

したがって

$$\prod_{k=1}^{N-1}F\left(\frac{k}{N}\right)=\sqrt{N}.$$

(9)　両辺の対数微分が等しいことから，ある定数 C によって

$$F(x)=C\cdot\exp\left(\frac{\pi i x^2}{2}+\frac{1}{2\pi i}\mathrm{Li}_2(1-e^{-2\pi i x})\right)$$

となる．ここで，$x\to 0$ とすると $C=1$ がわかる．　[証明終]

注意 1　(5)の特殊値 $F\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{2}$ の証明には，直接計算するのもわかりやすい：

$$\begin{aligned}F\left(\frac{1}{2}\right)&=\lim_{N\to\infty}e^{\frac{1}{2}}\prod_{n=1}^{N}\left\{\left(\frac{2n-1}{2n+1}\right)^n e\right\}\\&=\lim_{N\to\infty}e^{N+\frac{1}{2}}\prod_{n=1}^{N}\left(\frac{2n-1}{2n+1}\right)^n\\&=\lim_{N\to\infty}e^{N+\frac{1}{2}}\frac{1\cdot3\cdot5\cdot\cdots\cdot(2N-1)}{(2N+1)^N}\\&=\lim_{N\to\infty}e^{N+\frac{1}{2}}\frac{(2N)!}{2^N N!(2N+1)^N}\end{aligned}$$

であるが，スターリングの公式からの

$$\lim_{N\to\infty}\frac{(2N)!}{(2N)^{2N+\frac{1}{2}}e^{-2N}}=\sqrt{2\pi},$$

$$\lim_{N\to\infty}\frac{N^{N+\frac{1}{2}}e^{-N}}{N!}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}},$$

および

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{2N}\right)^N}=e^{-\frac{1}{2}}$$

を用いると

$$F\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{2}$$

とわかる．

注意 2　$F\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{2}$ はオイラーの有名な定積分

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\log(\sin x)dx=-\frac{\pi}{2}\log 2$$

とも「同値」である．それは(1)と $F(0)=1$ を使うと

$$F(x)=\exp\left(\int_0^x \pi t\cdot\cot(\pi t)dt\right)$$

となるから(ただし，積分路は $\mathbb{C}-\{\pm1,\pm2,\cdots\}$ 内で考える)である．実際

$$F\left(\frac{1}{2}\right)=\exp\left(\int_0^{\frac{1}{2}} \pi t\cdot\cot(\pi t)dt\right)$$

であり，部分積分により

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{1}{2}} \pi t\cdot\cot(\pi t)dt &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cot x dx\\ &= \frac{1}{\pi}\left[x\log(\sin x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\log(\sin x)dx\\ &= -\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\log(\sin x)dx\end{aligned}$$

となるため

$$F\left(\frac{1}{2}\right)=\exp\left(-\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\log(\sin x)dx\right).$$

よって，

$$F\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{2} \iff \int_0^{\frac{\pi}{2}}\log(\sin x)dx=-\frac{\pi}{2}\log 2$$

となる．

なお，オイラーの定積分は次のようなトリックで求めることができる．いま

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\log(\sin x)dx$$

とおくと

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\log(\cos x)dx$$

であるから

$$\begin{aligned}2I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\{\log(\sin x)+\log(\cos x)\}dx\\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\log(\sin x\cos x)dx\\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\log\left(\frac{\sin 2x}{2}\right)dx\end{aligned}$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(\sin 2x)dx - \frac{\pi}{2}\log 2$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \log(\sin x)dx - \frac{\pi}{2}\log 2$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(\sin x)dx - \frac{\pi}{2}\log 2$$
$$= I - \frac{\pi}{2}\log 2.$$

よって

$$I = -\frac{\pi}{2}\log 2.$$

なお，オイラー(1769 年；全集 I -15，p.130)は

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(\sin x)dx = -\frac{\pi}{2}\log 2$$

を“フーリエ展開”(もちろん，フーリエよりずっと前のことである)

$$\log(\sin x) = -\log 2 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\cos(2nx)$$

を示してから

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(\sin x)dx = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log 2\, dx - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2nx)dx$$
$$= -\frac{\pi}{2}\log 2$$

としても求めている．これは応用の広い方法である．

さらに，§4.2 で出てきたキンケリンの公式

$$\int_0^{x} \log(\sin \pi t)dt = \log\left(\frac{G(1-x)}{2^x G(x)}\right)$$

において $x=\frac{1}{2}$ とおくことにより

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \log(\sin \pi t)dt = -\frac{1}{2}\log 2,$$

つまり

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(\sin x)dx = -\frac{\pi}{2}\log 2$$

が求まるということも注意しておこう．深い話は何重にもつながっているのである．

また，ラーベの公式(F)もオイラーの定積分と同値である．というのは，

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \log(\sin \pi t)dt = \int_0^{\frac{1}{2}} \log\left(\frac{\pi}{\Gamma(t)\Gamma(1-t)}\right)dt$$
$$= \frac{1}{2}\log\pi - \int_0^{\frac{1}{2}} (\log\Gamma(t)+\log\Gamma(1-t))dt$$
$$= \frac{1}{2}\log\pi - \int_0^1 \log\Gamma(t)dt$$

であるので，

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \log(\sin \pi t)dt = -\frac{1}{2}\log 2$$
$$\iff \quad \int_0^1 \log\Gamma(t)dt = \frac{1}{2}\log(2\pi)$$

となるのである．

注意 3　(3) (7) (9) の証明方法は，いずれも両辺の対数微分が一致することを示し，定数倍を定めるというものであり，今後も何度も使われる．なお，(7) (9) では対数微分の計算を省略したが，いずれもていねいにやればできる．念のため，(7) の場合に計算を記しておこう．

左辺の対数微分は

$$N\frac{F'(Nx)}{F(Nx)} = N\pi x\cdot N\cdot\cot(\pi Nx)$$

である．右辺の対数微分は

$$N\sum_{k=0}^{N-1}\frac{F'\left(x+\frac{k}{N}\right)}{F\left(x+\frac{k}{N}\right)} - \sum_{k=1}^{N-1} k\pi\cot\pi\left(x+\frac{k}{N}\right)$$
$$= N\sum_{k=0}^{N-1}\pi\left(x+\frac{k}{N}\right)\cot\pi\left(x+\frac{k}{N}\right) - \sum_{k=1}^{N-1} k\pi\cot\pi\left(x+\frac{k}{N}\right)$$
$$= N\pi x\sum_{k=0}^{N-1}\cot\pi\left(x+\frac{k}{N}\right)$$

となる．

ここで，§4.1 で証明した

$$\sin(Nx) = 2^{N-1}\prod_{k=0}^{N-1}\sin\left(x+\frac{k\pi}{N}\right)$$

を思い起こして，対数微分すると

$$N\cot(Nx)=\sum_{k=0}^{N-1}\cot\left(x+\frac{k\pi}{N}\right)$$

がわかる．したがって

$$N\cot(\pi Nx)=\sum_{k=0}^{N-1}\cot\pi\left(x+\frac{k}{N}\right)$$

である．よって，(7)の左辺と右辺の対数微分は等しいことがわかる．

注意 4　(9)は条件

$$\left|1-e^{-2\pi ix}\right|<1$$

の確認が取扱いにくいものなので，たとえば

『$\mathrm{Im}(x)<0$ のとき

$$F(x)=\exp\left(-\frac{1}{2\pi i}\mathrm{Li}_2(e^{-2\pi ix})+x\cdot\log(1-e^{-2\pi ix})\right.$$
$$\left.+\frac{\pi i}{2}x^2-\frac{\pi i}{12}\right)$$
』

くらいのほうが，わかりやすいであろう．証明は(9)と同様である．これについては，後に拡張した形を考えて種々に応用することになる．

練習問題

カタラン(Catalan)定数

$$G=\sum_{n:\text{奇数}}\frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n^2}=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{(2m+1)^2}$$

に対する表示

$$G=2\pi\log\left(F\left(\frac{1}{4}\right)2^{-\frac{1}{8}}\right)$$

を証明せよ．

ヒント　フーリエ展開

$$\log(\sin x)=-\log 2-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\cos(2nx).$$

［解答］　まず

$$\log F\left(\frac{1}{4}\right)=\int_0^{\frac{1}{4}}\pi t\cdot\cot(\pi t)dt$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}} x\cot x\,dx$$
$$= \frac{1}{\pi}\left[x\log(\sin x)\right]_0^{\frac{\pi}{4}} - \frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \log(\sin x)dx$$
$$= -\frac{\log 2}{8} - \frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \log(\sin x)dx$$

と計算して，$\log(\sin x)$ のフーリエ展開を使うと

$$\log F\left(\frac{1}{4}\right) = -\frac{\log 2}{8} + \frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \log 2\,dx + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos(2nx)dx$$

となる．ここで

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \log 2\,dx = \frac{\log 2}{4},$$

$$\frac{1}{\pi n}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos(2nx)dx = \frac{1}{\pi n}\left[\frac{\sin(2nx)}{2n}\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$
$$= \frac{\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)}{2\pi n^2}$$
$$= \begin{cases} \dfrac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{2\pi n^2} & n \text{ は奇数}, \\ 0 & n \text{ は偶数} \end{cases}$$

となるので

$$\log F\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{\log 2}{8} + \frac{1}{2\pi}\sum_{n:\text{奇数}}\frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n^2}$$
$$= \frac{\log 2}{8} + \frac{1}{2\pi}G$$

より

$$G = 2\pi\log\left(F\left(\frac{1}{4}\right)2^{-\frac{1}{8}}\right)$$

となることが証明された．　　　　　　　　　　　　　　　　［解答終］

補足　$\log(\sin x)$ のフーリエ展開の複素解析からのわかりやすい求め方

は，$0<x<1$ に対して

$$\log(1-e^{2ix}) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{2inx}}{n}$$

の実部を見るとよい：

左辺の実部は

$$\mathrm{Re}\log(1-e^{2ix}) = \log\left|1-e^{2ix}\right| = \log(2\sin x),$$

右辺の実部は

$$-\mathrm{Re}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{2inx}}{n} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2nx)}{n}$$

である．よって，フーリエ展開

$$\log(2\sin x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2nx)}{n}$$

を得る．

さらに，ついでに触れると，複素平面において原点 0 を中心とする単位円 $|z|=1$ 上の積分 $\oint$ を考えると

$$\oint \log(1-z)\frac{dz}{z} = 0$$

$$\overset{z=e^{2i\theta}}{\Longleftrightarrow} \quad \int_0^{\pi} \log(1-e^{2i\theta})d\theta = 0$$

$$\Longleftrightarrow \quad \int_0^{\pi} \log(2\sin\theta)d\theta = 0$$

$$\Longleftrightarrow \quad \int_0^{\pi} \log(\sin\theta)d\theta = -\pi\log 2$$

$$\Longleftrightarrow \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(\sin\theta)d\theta = -\frac{\pi}{2}\log 2$$

となる(ただし，$\log(1-e^{2i\theta})$ の虚部は $i\theta-\dfrac{\pi i}{2}$ なので，その部分の積分は 0 になることが明白なことを使った)ので，オイラーの定積分はコーシーの留数定理からすぐわかることにもなる(**注意 2** を参照)．オイラーの定積分は何通りに証明されたであろうか，深く考えてみてほしい．

4.4 バーンズの研究(1900年-1904年)

バーンズは1900年-1904年の一連の論文

(1) E.W. Barnes,"The theory of the G-function", *Quart. J. Math.*, **31** (1900), 264-314,

(2) E.W. Barnes,"The genesis of the double gamma function", *Proc. London Math. Soc.*, **31** (1900), 358-381,

(3) E.W. Barnes, "The theory of the double gamma function", *Philos. Trans. Royal Soc.*, (A)**196** (1901), 265-388,

(4) E.W. Barnes, "On the theory of the multiple gamma function", *Trans. Cambridge Philos. Soc.*, **19** (1904), 374-425

において，多重ガンマ関数論の基盤を構築した．残念ながら，多重三角関数論への動きは見当らない．

バーンズは，本書で紹介してきたキンケリン(1860年)とヘルダー(1886年)の研究はよく知っていて，それらをヒントとして，まず，G関数を作った[論文(1)]．それは

$$G(x+1) = (2\pi)^{\frac{x}{2}} e^{-\frac{\gamma+1}{2}x^2-\frac{x}{2}} \prod_{n=1}^{\infty}\left(\left(1+\frac{x}{n}\right)^n e^{-x+\frac{x^2}{2n}}\right)$$

である．これは，前におかれた指数関数的な部分を除くとヘルダーのF関数

$$F(x) = e^x \frac{\prod_{n=1}^{\infty}\left(\left(1-\frac{x}{n}\right)^n e^{x+\frac{x^2}{2n}}\right)}{\prod_{n=1}^{\infty}\left(\left(1+\frac{x}{n}\right)^n e^{-x+\frac{x^2}{2n}}\right)}$$

の分母に他ならない．キンケリンのG関数$G(x)=G^{\mathrm{K}}(x)$とまぎらわしいので，バーンズのG関数は$G^{\mathrm{B}}(x)$と書くことにする．すると，

$$G^{\mathrm{B}}(1) = 1,$$
$$G^{\mathrm{B}}(x+1) = G^{\mathrm{B}}(x)\Gamma(x),$$

$$G^{\mathrm{B}}(n+1) = \frac{(n!)^n}{1^1 \cdot 2^2 \cdot \cdots \cdot n^n}$$

をみたしている．

ヘルダーの F 関数との関係は

$$F(x) = (2\pi)^x \frac{G^{\mathrm{B}}(1-x)}{G^{\mathrm{B}}(1+x)}$$

となっていることは，すぐわかる．また，キンケリンの G 関数との関係は

$$G^{\mathrm{K}}(x) = \frac{\Gamma(x)^x}{G^{\mathrm{B}}(x+1)}$$

となることをバーンズは示している．この 2 つの関係を合わせれば

$$F(x) = \frac{G^{\mathrm{K}}(x)}{G^{\mathrm{K}}(1-x)}(2\sin(\pi x))^x$$

となり，§4.2 の計算と合致することがわかる．

練習問題

バーンズの関係式

$$G^{\mathrm{K}}(x) = \frac{\Gamma(x)^x}{G^{\mathrm{B}}(x+1)}$$

を用いて

$$F(x) = \frac{G^{\mathrm{K}}(x)}{G^{\mathrm{K}}(1-x)}(2\sin(\pi x))^x$$

を証明せよ．

[解答]

$$F(x) = (2\pi)^x \frac{G^{\mathrm{B}}(1-x)}{G^{\mathrm{B}}(1+x)}$$

において，

$$G^{\mathrm{B}}(1+x) = \frac{\Gamma(x)^x}{G^{\mathrm{K}}(x)},$$

$$G^{\mathrm{B}}(1-x) = \frac{\Gamma(-x)^{-x}}{G^{\mathrm{K}}(-x)}$$

$$= \frac{\Gamma(-x)^{-x}(-x)^{-x}}{G^{\mathrm{K}}(1-x)}$$
$$= \frac{\Gamma(1-x)^{-x}}{G^{\mathrm{K}}(1-x)}$$

を用いると

$$\begin{aligned} F(x) &= (2\pi)^x \frac{G^{\mathrm{K}}(1-x)}{G^{\mathrm{K}}(x)} \cdot \left(\frac{1}{\Gamma(x)\Gamma(1-x)} \right)^x \\ &= (2\pi)^x \frac{G^{\mathrm{K}}(1-x)}{G^{\mathrm{K}}(x)} \cdot \left(\frac{\sin(\pi x)}{\pi} \right)^x \\ &= \frac{G^{\mathrm{K}}(1-x)}{G^{\mathrm{K}}(x)} (2\sin(\pi x))^x \end{aligned}$$

となる．　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　[解答終]

バーンズの $G^{\mathrm{B}}(x)$ は無限積表示から出発しているので，正則関数であることが明白になっている．これに比して，キンケリンの $G^{\mathrm{K}}(x)$ は関係式

$$\frac{G^{\mathrm{K}}(x+1)}{G^{\mathrm{K}}(x)} = x^x$$

からわかるように，複素関数としては簡明とは言えない．つまり，

$$G^{\mathrm{K}}(x) = G^{\mathrm{B}}(x+1)^{-1} \times \Gamma(x)^x$$

に表われている $\Gamma(x)^x$ という複素関数としては扱いにくい部分を $G^{\mathrm{K}}(x)$ から取り除いたものが，本質的に $G^{\mathrm{B}}(x)$ になっているのである．

さて，バーンズの一連の論文(1)-(4)のうち，論文(1)は $G^{\mathrm{B}}(x)$ を扱ったものであったが，続いては，バーンズの記号で

2 重ガンマ関数　$G(x,\tau)$　[論文(2)],

2 重ガンマ関数　$\Gamma_2(x,(\omega_1,\omega_2))$　[論文(3)],

r 重ガンマ関数　$\Gamma_r(x,(\omega_1,\cdots,\omega_r))$　[論文(4)]

を構成して研究している．これらのガンマ関数を $G^{\mathrm{B}}(x,\tau)$, $\Gamma_2^{\mathrm{B}}(x,(\omega_1,\omega_2))$, $\Gamma_r^{\mathrm{B}}(x,(\omega_1,\cdots,\omega_r))$ と書くことにする．

われわれの多重ガンマ関数(第 3 章)

$$\Gamma_r(x,(\omega_1,\cdots,\omega_r)) = \left(\prod_{n_1,\cdots,n_r\geqq 0}(n_1\omega_1+\cdots+n_r\omega_r+x)\right)^{-1}$$

を基準として見直しておくと，論文(4)の Γ_r^{B} は

$$\Gamma_r^{\mathrm{B}}(x,(\omega_1,\cdots,\omega_r)) = \Gamma_r(x,(\omega_1,\cdots,\omega_r))\rho_r(\omega_1,\cdots,\omega_r)$$

となる．ここで，$\rho_r(\omega_1,\cdots,\omega_r)$ はスターリング保型形式

$$\rho_r(\omega_1,\cdots,\omega_r) = \prod_{\substack{n_1,\cdots,n_r\geqq 0\\(n_1,\cdots,n_r)\neq(0,\cdots,0)}}(n_1\omega_1+\cdots+n_r\omega_r)$$

である(§3.4)．バーンズの論文(3)の Γ_2^{B} は論文(4)の Γ_r^{B} で $r=2$ としたものとなっている．バーンズの論文(2)の $G^{\mathrm{B}}(x,\tau)$ は論文(1)の $G^{\mathrm{B}}(x)$ と論文(3)の $\Gamma_2^{\mathrm{B}}(x,(\omega_1,\omega_2))$ との中間的なものであり，ほぼ

$$\begin{aligned}\Gamma_2^{\mathrm{B}}(x,(1,\tau)) &\longleftrightarrow G^{\mathrm{B}}(x,\tau),\\ G^{\mathrm{B}}(x,1) &\longleftrightarrow G^{\mathrm{B}}(x)\end{aligned}$$

という対応になっている．ただし，状況は単純ではなく，バーンズの論文は多重ガンマ関数に多様な記号を使っていることが，後の研究に混乱を生じさせている原因ともなっている．たとえば，第III部で言及するサルナックの論文とボロスの論文

P. Sarnak, "Determinant of Laplacians", *Comm. Math. Phys.*, **110** (1987), 113-120,

A. Voros, "Spectral functions, special functions and the Selberg zeta functions", *Comm. Math. Phys.*, **110** (1987), 439-465

は，ともにセルバーグ・ゼータ関数の行列式表示を2重三角関数・2重ガンマ関数を用いて与えていて，ほぼ同内容なのであるが，その計算において必要となる2重ガンマ関数をサルナックは「$\Gamma_2(x)$」と書きボロスは「$G(x)$」と書いている．このうち，ボロスの $G(x)$ は $G^{\mathrm{B}}(x)$ のことでわかりやすいが，サルナックの"$\Gamma_2(x)$"は

$$\text{“}\Gamma_2(x)\text{”} = G^{\mathrm{B}}(x)^{-1}$$

のことであり，われわれの $\Gamma_2(x,(1,1))$ ともバーンズの $\Gamma_2^{\mathrm{B}}(x,(1,1))$ とも異なる．実際，

$$\begin{aligned}\Gamma_2^{\mathrm{B}}(x,(1,1)) &= G^{\mathrm{B}}(x)^{-1}(2\pi)^{\frac{x}{2}} \\ &= \Gamma_2(x,(1,1))\rho_2(1,1) \\ &= \Gamma_2(x,(1,1))\sqrt{2\pi}e^{-\zeta'(-1)}\end{aligned}$$

となっている．ここで，§3.4 の結果

$$\rho_2(1,1) = \sqrt{2\pi}e^{-\zeta'(-1)}$$

を用いた．

このように，多重ガンマ関数にまぎらわしい記号が多いのは，バーンズがいくつもの記号を用いたことも一因ではあるが，根本原因は基準となる正規化積で定義されたわれわれの記号 $\Gamma_r(x,(\omega_1,\cdots,\omega_r))$ が使われていなかったことにある．正規化積がないと各自が気ままにその場しのぎの記号を用いてしまって大混乱となってしまっている．多重ガンマ関数(や多重三角関数)の出ている論文を読むときには，われわれの $\Gamma_r(x,(\omega_1,\cdots,\omega_r))$ (や $S_r(x,(\omega_1,\cdots,\omega_r))$)で書き換えて統一しておかないと安心して読めない状態なのは，なげかわしいことである．

4.5　新谷の研究(1977年-1980年)

新谷卓郎(しんたにたくろう)(1943年2月4日-1980年11月14日)は論文

(1) T. Shintani, “On a Kronecker limit formula for real quadratic fields”, *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math.*, **24** (1977), 167-199,
[T. Shintani, “On Kronecker limit formula for real quadratic fields”, *Proc. Japan Acad.*, **52A** (1976), 355-358, として速報]

(2) T. Shintani, “On certain ray class invariants of real quadratic fields”, *J. Math. Soc. Japan*, **30** (1978), 139-167,

(3) 新谷卓郎「代数体のL-函数の特殊値について」『数学』**29** (1977), 204-216

において，バーンズの 2 重ガンマ関数 $\Gamma_2^{\mathrm{B}}(x,(\omega_1,\omega_2))$ の商

$$F(x,(\omega_1,\omega_2)) = \frac{\Gamma_2^{\mathrm{B}}(\omega_1+\omega_2-x,(\omega_1,\omega_2))}{\Gamma_2^{\mathrm{B}}(x,(\omega_1,\omega_2))}$$

を用いた．新谷は名前を付けずに $F(x,(\omega_1,\omega_2))$ と書いているだけであるが，これが，2 重三角関数と呼ぶべきものであった．

ただし，新谷の $F(x,(\omega_1,\omega_2))$ は記号が不安定なので論文を読む際には注意されたい．たとえば，論文(1)において，上の形の $F(x,(\omega_1,\omega_2))$ は重要な結果

定理　$\omega_1>0$, $\mathrm{Im}(\omega_2)>0$ に対して次が成立する：

$$F(x,(\omega_1,\omega_2)) = \frac{\prod_{n=0}^{\infty}\left(1-\exp\left(\frac{2\pi i n\omega_2}{\omega_1}\right)\exp\left(\frac{2\pi i x}{\omega_1}\right)\right)}{\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\exp\left(-\frac{2\pi i n\omega_1}{\omega_2}\right)\exp\left(\frac{2\pi i x}{\omega_2}\right)\right)}$$
$$\times\exp\left(\frac{\pi i}{2}\left\{\frac{x^2}{\omega_1\omega_2}-\left(\frac{1}{\omega_1}+\frac{1}{\omega_2}\right)x+\frac{1}{6}\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}+\frac{\omega_1}{\omega_2}+3\right)\right\}\right). \qquad \square$$

を証明しているところ(論文(1)p.181-182，Proposition 5，Proof)では，その形であるが，それ以外の場所では

$$F(x,(\omega_1,\omega_2)) = \frac{\Gamma_2^{\mathrm{B}}(x,(\omega_1,\omega_2))}{\Gamma_2^{\mathrm{B}}(\omega_1+\omega_2-x,(\omega_1,\omega_2))}$$

となっているので，注意が必要である．しかも，論文 p.185 の記述のように，Proposition 5 の $F(x,(\omega_1,\omega_2))$ が後者だったと著者が思い違いをしているので，論文を読む場合は場面ごとにどの意味かを，記号にまどわされずに認識しないと困ったことになる．

なお，(1)の速報版(*Proc. Japan Acad.*, 1976 年)の段階では，記号

$$F((\omega_1,\omega_2),x) = \Gamma_2^{\mathrm{B}}(x,(\omega_1,\omega_2))$$

を導入していて，2 重三角関数には至っていない．

また，

(4) T. Shintani, "A proof of the classical Kronecker limit formula",

Tokyo J. Math., **3** (1980), 191-199

ではバーンズの2重ガンマ関数 $\Gamma_2^{\mathrm{B}}(x,(\omega_1,\omega_2))$ を用いて古典的なクロネッカー極限公式の別証明を与え，

(5) T. Shintani, "On special values of zeta functions of totally real algebraic number fields", *Proc. ICM* 1978, Helsinki, pp.591-597

ではバーンズの多重ガンマ関数 $\Gamma_r^{\mathrm{B}}(x,(\omega_1,\cdots,\omega_r))$ を用いているが，どちらの論文でも"三角関数版"は考えていない．

さて，バーンズの論文自体が記号について安定していないものであったが新谷の論文も記号が不安定では，多重三角関数論の先が思いやられるのは読者にも感じられたことであろう．

そこで，これ以上の混乱が広まらないよう，本書のこれ以降は，著者の導入した記号を用いて統一的に書くことにする．多重三角関数一般は次節で導入することにして，さしあたり，本節では2重三角関数を

$$S_2(x,(\omega_1,\omega_2))=\frac{\Gamma_2(\omega_1+\omega_2-x,(\omega_1,\omega_2))}{\Gamma_2(x,(\omega_1,\omega_2))}$$

と定義する．ここの2重ガンマ関数は第3章の通り正規化されたものである．今の場合は

$$\Gamma_2^{\mathrm{B}}(x,(\omega_1,\omega_2))=\Gamma_2(x,(\omega_1,\omega_2))\rho_2(\omega_1,\omega_2)$$

を使うと

$$S_2(x,(\omega_1,\omega_2))=\frac{\Gamma_2^{\mathrm{B}}(\omega_1+\omega_2-x,(\omega_1,\omega_2))}{\Gamma_2^{\mathrm{B}}(x,(\omega_1,\omega_2))}$$

となり，新谷が用いた $F(x,(\omega_1,\omega_2))$ になる（もちろん，新谷の使用している記号については，上の通り注意が必要である）．

新谷の考察した問題は「クロネッカー青春の夢」と呼ばれる問題である．これは，簡単に書くと

『代数体 K（有理数体 $\mathbb{Q}$ の有限次拡大体）に対して，K の最大アーベル拡大（類体）K^{ab} を

$$K^{ab}=K(F_K(K))$$

として与える関数 $F_K\colon K\longrightarrow K^{ab}$ を求めよ』

というものであって，クロネッカーが 1853 年に $K=\mathbb{Q}$ の場合を $F_{\mathbb{Q}}(x)=e^{2\pi ix}$ として解き，高木貞治が 1920 年に楕円関数(レムニスケート三角関数，σ-関数)を $F_K(x)$ として解決したのである．なお，虚 2 次体の特別の場合は

$K=\mathbb{Q}(\sqrt{-1})$ のとき，高木貞治(1903 年)，

$K=\mathbb{Q}(\sqrt{-3})$ のとき，竹内端三(1916 年)

が解いている．新谷は実 2 次体 K を考え，そのときの

$$F_K(x)=S_2(x,(1,\varepsilon_K))$$

が妥当と考えたのである．ここで，ε_K は K の基本単数である．[現実には 2 重三角関数の何個かの積のみ扱えた．]

クロネッカー青春の夢から新谷の研究への流れについては次の記事に詳述したので参照されたい：

黒川信重「新谷卓郎の二重三角関数：実 2 次体のクロネッカー青春の夢の実現へ」『数学のたのしみ』2005 年冬号，76-89.

新谷は，実 2 次体の場合に強力に支持する数多くの実例を得た．たとえば，$K=\mathbb{Q}(\sqrt{21})$ のとき $\varepsilon_K=\dfrac{5+\sqrt{21}}{2}$ であり $F_K(x)=S_2(x,(1,\varepsilon_K))$ とした場合：

定理　$\varepsilon=\dfrac{5+\sqrt{21}}{2}$ とすると

$$S_2\left(\frac{1}{3},(1,\varepsilon)\right)S_2\left(1+\frac{\varepsilon}{3},(1,\varepsilon)\right)S_2\left(\frac{2+2\varepsilon}{3},(1,\varepsilon)\right)$$
$$=\sqrt{\frac{1}{2}\left(\frac{1+\sqrt{21}}{2}-\sqrt{\frac{3+\sqrt{21}}{2}}\right)}.$$

∎

本来は，左辺が単独の 2 重三角値になっていると一層よかったのであった．その願いは 40 年後に

定理(山本修司)　$\varepsilon=\dfrac{5+\sqrt{21}}{2}$ のとき

$$S_2\left(\frac{1+2\varepsilon}{3},(1,\varepsilon)\right)=\sqrt{\frac{1}{2}\left(\frac{1+\sqrt{21}}{2}-\sqrt{\frac{3+\sqrt{21}}{2}}\right)}$$

∎

として実現した：

S. Yamamoto, "On Kronecker limit formulas for real quadratic fields", *J. Number Theory*, **128** (2008), 426–450.

また，

定理(小野寺一浩)　$\varepsilon=2+\sqrt{5}$ としたとき

$$S_2\left(\frac{1+3\varepsilon}{4},(1,\varepsilon)\right)=\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}-\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}}.$$

∎

も，ごく最近得られた：

K. Onodera, "An analogue of the Dedekind-Rademacher sum and certain ray class invariants of real quadratic fields", *J. Number Theory*, **133** (2013), 1907–1931.

このように，実2次体のクロネッカー青春の夢へと，前進はしているものの，その歩みはとてもゆっくりとしている．新谷が1980年に37歳という若さで亡くなってしまわなければ，その後の十年で夢を実現してくれたに違いないと思うのである．新谷が突然去ったことは，人間によって進歩するしかない数学にとって，とり返しのつかない痛手である．実2次体のクロネッカー青春の夢は現在も実現されていない．

4.6　黒川の研究(1980年代～)

黒川は，1980年代に多重三角関数の研究を開始し，1990年頃から論文として発表した：

(1) N. Kurokawa, "Multiple sine functions and Selberg zeta func-

tions", *Proc. Japan Acad.*, **67A** (1991), 61-64.

(2) N. Kurokawa, "Gamma factors and Plancherel measures", *Proc. Japan Acad.*, **68A** (1992), 256-260.

(3) N. Kurokawa, "Multiple zeta functions: an example", *Advanced Studies in Pure Math.*, **21** (1992), 219-226 [1990 年 8 月の ICM サテライト・シンポジウム"Zeta Functions in Geometry"の報告集].

(4) 黒川信重「三角関数の一般化を巡って」『津田塾大学・計算機科学研究所報』**4** (1992), 1-25 [1991 年 11 月の『近現代数学史シンポジウム』の報告集].

(5) 黒川信重「多重三角関数論講義」東京大学, 1991 年 4 月-7 月.

黒川の研究は, (5)を単行本化した

黒川信重・小山信也『多重三角関数論講義』日本評論社, 2010 年

に詳しい. [その後の研究については, 同書所収の「20 年後の風景」を参照されたい.]

研究内容および証明は本書第 5 章以降に詳述するが, 主なところは次の通りである.

(A) 多重三角関数 $S_r(x,(\omega_1,\cdots,\omega_r))$ を

$$\begin{aligned} &S_r(x,(\omega_1,\cdots,\omega_r))\\ &\quad=\Gamma_r(x,(\omega_1,\cdots,\omega_r))^{-1}\Gamma_r(\omega_1+\cdots+\omega_r-x,(\omega_1,\cdots,\omega_r))^{(-1)^r}\end{aligned}$$

と定義して研究.

たとえば,

$$\begin{aligned} S_0(x,\varnothing)&=\Gamma_0(x,\varnothing)^{-1}\Gamma_0(-x,\varnothing)\\ &=\left(\frac{1}{x}\right)^{-1}\left(-\frac{1}{x}\right)\\ &=-1,\end{aligned}$$

$$S_1(x,\omega)=\Gamma_1(x,\omega)^{-1}\Gamma_1(\omega-x,\omega)^{-1}$$

$$= \left(\frac{\Gamma\left(\frac{x}{\omega}\right)}{\sqrt{2\pi}}\omega^{\frac{x}{\omega}-\frac{1}{2}}\right)^{-1}\left(\frac{\Gamma\left(\frac{\omega-x}{\omega}\right)}{\sqrt{2\pi}}\omega^{\frac{\omega-x}{\omega}-\frac{1}{2}}\right)^{-1}$$
$$= \frac{2\pi}{\Gamma\left(\frac{x}{\omega}\right)\Gamma\left(1-\frac{x}{\omega}\right)}$$
$$= 2\sin\left(\frac{\pi x}{\omega}\right)$$

であり，

$$S_2(x,(\omega_1,\omega_2)) = \frac{\Gamma_2(\omega_1+\omega_2-x,(\omega_1,\omega_2))}{\Gamma_2(x,(\omega_1,\omega_2))}$$

は新谷(1977年)の2重三角関数と一致する．3重三角関数は

$$\begin{aligned} &S_3(x,(\omega_1,\omega_2,\omega_3)) \\ &\quad = \Gamma_3(x,(\omega_1,\omega_2,\omega_3))^{-1}\Gamma_3(\omega_1+\omega_2+\omega_3-x,(\omega_1,\omega_2,\omega_3))^{-1} \end{aligned}$$

である．

基本性質としては次のようなものがある．

(1) 原点での零点

$S_r(x,(\omega_1,\cdots,\omega_r))$ は $x=0$ で1位の零点をもつ．

(2) 対称性

$$S_r(\omega_1+\cdots+\omega_r-x,\boldsymbol{\omega}) = S_r(x,\boldsymbol{\omega})^{(-1)^{r-1}}.$$

(3) 周期性

$$S_r(x+\omega_i,\boldsymbol{\omega}) = S_r(x,\boldsymbol{\omega})S_{r-1}(x,\boldsymbol{\omega}\langle i\rangle)^{-1}.$$

ここで，

$$\boldsymbol{\omega}\langle i\rangle = (\omega_1,\cdots,\omega_{i-1},\omega_{i+1},\cdots,\omega_r).$$

たとえば

$$S_1(x+\omega,\omega) = S_1(x,\omega)S_0(x,\varnothing)^{-1}$$

$$= -S_1(x,\omega),$$

$$S_2(x+\omega_1,(\omega_1,\omega_2)) = S_2(x,(\omega_1,\omega_2))S_1(x,\omega_2)^{-1},$$

$$S_2(x+\omega_2,(\omega_1,\omega_2)) = S_2(x,(\omega_1,\omega_2))S_1(x,\omega_1)^{-1}.$$

(4) $\boldsymbol{N}$ 倍角の公式

$$S_r(Nx,\boldsymbol{\omega}) = \prod_{k_1,\cdots,k_r=0,\cdots,N-1} S_r\left(x+\frac{k_1\omega_1+\cdots+k_r\omega_r}{N},\boldsymbol{\omega}\right).$$

(5) $\boldsymbol{N}$ 分値の積の公式

$$\prod_{\substack{k_1,\cdots,k_r=0,\cdots,N-1\\(k_1,\cdots,k_r)\neq(0,\cdots,0)}} S_r\left(\frac{k_1\omega_1+\cdots+k_r\omega_r}{N},\boldsymbol{\omega}\right) = N.$$

(6) 斉次性

$$S_r(cx,c\boldsymbol{\omega}) = S_r(x,\boldsymbol{\omega}).$$

(B) 素朴な多重三角関数 $\mathcal{S}_r(r=2,3,\cdots)$ を

$$\mathcal{S}_r(x) = e^{\frac{x^{r-1}}{r-1}} \prod_{\substack{n=-\infty\\n\neq0}}^{\infty} P_r\left(\frac{x}{n}\right)^{n^{r-1}}$$

と定義して研究；$r=1$ のときは $\mathcal{S}_1(x)=2\sin(\pi x)=S_1(x,1)$ とおく．ここで，

$$P_r(u) = (1-u)\exp\left(u+\frac{u^2}{2}+\cdots+\frac{u^r}{r}\right).$$

たとえば，

$$\mathcal{S}_2(x) = e^x \prod_{n=1}^{\infty}\left\{\left(\frac{1-\frac{x}{n}}{1+\frac{x}{n}}\right)^n e^{2x}\right\}$$

はヘルダー(1886 年)の 2 重三角関数と一致する．また，

$$\mathcal{S}_3(x) = e^{\frac{x^2}{2}} \prod_{n=1}^{\infty}\left\{\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)^{n^2} e^{x^2}\right\}$$

である．

基本性質としては次のようなものがある（$r \geqq 2$ とする）．

（1） 微分方程式

$$\mathcal{S}_r'(x) = \mathcal{S}_r(x)\pi x^{r-1}\cot(\pi x).$$

（2） 積分表示

$$\mathcal{S}_r(x) = \exp\left(\int_0^x \pi t^{r-1}\cot(\pi t)dt\right).$$

ここで，積分路

$$\int_0^x \subset \mathbb{C}-\{\pm 1, \pm 2, \cdots\}.$$

（3） 周期性

（4） $\boldsymbol{N}$ 倍角の公式

（5） $\boldsymbol{N}$ 分値の積の公式

（☆） $\mathcal{S}_r(x)$ と $S_r(x,(1,\cdots,1))$ の**明示関係式．**

たとえば

$$\mathcal{S}_2(x) = S_2(x,(1,1))^{-1}S_1(x,1).$$

（C） $S_r(x){=}S_r(x,(1,\cdots,1))$ に関する性質

（1） $S_r(x)$ は $x{=}0$ で1位の零点をもつ．

（2） $S_r(r-x){=}S_r(x)^{(-1)^{r-1}}$.

（3） $S_r(x+1){=}S_r(x)S_{r-1}(x)^{-1}$.

（4） $S_r(Nx){=}\displaystyle\prod_{k_1,\cdots,k_r=0,\cdots,N-1} S_r\left(x+\frac{k_1+\cdots+k_r}{N}\right).$

（5） $\displaystyle\prod_{\substack{k_1,\cdots,k_r=0,\cdots,N-1\\(k_1,\cdots,k_r)\neq(0,\cdots,0)}} S_r\left(\frac{k_1+\cdots+k_r}{N}\right){=}N.$

（☆☆） **微分方程式**

$$S_r'(x) = S_r(x)(-1)^{r-1}\binom{x-1}{r-1}\pi\cot(\pi x).$$

この微分方程式は（B）の（1）（☆）を用いて証明され（第5章），セルバーグ・

ゼータ関数への重要な応用をもつ(第7章).

(A)〜(C)を通しての重要な問題は N 分値の代数性である．たとえば，

予想 $S_r\left(\dfrac{k_1\omega_1+\cdots+k_r\omega_r}{N}, \boldsymbol{\omega}\right)$ **は代数的数.**

結果については第5章を参照.

このことがわかると，クロネッカー青春の夢に接近することができるし，値のよくわかっていない $\zeta(3)$ などでも

$$\zeta(3) = 4\pi^2 \log S_3(1),$$

$$\zeta(3) = \frac{16\pi^2}{3}\log\left(S_3\left(\frac{1}{2}\right)^{-1} 2^{\frac{3}{8}}\right),$$

$$\zeta(3) = \frac{8\pi^2}{7}\log\left(\mathcal{S}_3\left(\frac{1}{2}\right)^{-1} 2^{\frac{1}{4}}\right)$$

などから有力な手がかりが得られる．なお，$S_3(1)$ は2分値 $(N{=}2)$ である：

$$S_3(1) = S_3\left(\frac{1\cdot 1+1\cdot 1+0\cdot 1}{2}, (1,1,1)\right).$$

第5章
多重三角関数の基礎

本章では，多重三角関数の基礎的な性質を証明する．とくに，第4章の最後の節(§4.6)で述べた内容を中心に扱う．順序としては，はじめに素朴な多重三角関数$\mathcal{S}_r(x)$を調べ(§5.1)，一般周期の多重三角関数$\mathcal{S}_r(x,(\omega_1,\cdots,\omega_r))$を見て(§5.2-§5.6)，周期$(1,\cdots,1)$の多重三角関数$\mathcal{S}_r(x)$を扱う(§5.7-§5.9)という段取りである．さらに，おわり(§5.10)において，ゼータ関数やL関数の特殊値と多重三角関数の等分値との関係を見る．

5.1 素朴な多重三角関数

素朴な多重三角関数は，$r \geqq 2$に対して

$$\mathcal{S}_r(x) = e^{\frac{x^{r-1}}{r-1}} \prod_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty} P_r\left(\frac{x}{n}\right)^{n^{r-1}}$$

と定義された(§4.6)．ここで

$$P_r(u) = (1-u)\exp\left(u+\frac{u^2}{2}+\cdots+\frac{u^r}{r}\right)$$

である．

なお，$r=1$のときは

$$\mathcal{S}_1(x) = 2\sin \pi x$$

$$= 2\pi x \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right)$$
$$= 2\pi x \prod_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty} P_1\left(\frac{x}{n}\right)$$

と定義しておく.

はじめに証明する $\mathcal{S}_r(x)$ の基本的な性質は次の通りである.

定理 5.1.1　$\mathcal{S}_r(x)\,(r \geqq 2)$ は次の性質をもつ.

(1)

$$\mathcal{S}_r'(x) = \mathcal{S}_r(x)\pi x^{r-1}\cot(\pi x),$$
$$\mathcal{S}_r(0) = 1,$$
$$\mathcal{S}_r'(0) = \begin{cases} 0 & r \geqq 3, \\ 1 & r = 2. \end{cases}$$

(2)　$\mathcal{S}_r(x)$ は 2 階の代数的微分方程式をみたす：

$$\mathcal{S}_r''(x) + (x^{1-r}-1)\mathcal{S}_r'(x)^2\mathcal{S}_r(x)^{-1} + (r-1)x^{-1}\mathcal{S}_r'(x) + \pi^2 x^{r-1}\mathcal{S}_r(x) = 0.$$

(3)　$\mathcal{S}_r(x) = \exp\left(\int_0^x \pi t^{r-1}\cot(\pi t)dt\right).$

ただし，この積分路は $\mathbb{C}-\{\pm 1, \pm 2, \cdots\}$ 内に取るものとする.

(4)　$\mathrm{Im}(x)<0$ に対して

$$\mathcal{S}_r(x) = \exp\left(-\frac{(r-1)!}{(2\pi i)^{r-1}}\sum_{k=0}^{r-1}\frac{(2\pi i)^k}{k!}x^k \mathrm{Li}_{r-k}(e^{-2\pi i x}) + \frac{\pi i}{r}x^r + \frac{(r-1)!}{(2\pi i)^{r-1}}\zeta(r)\right).$$

ここで,

$$\mathrm{Li}_k(u) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{u^n}{n^k}$$

は k 次多重対数関数である.

さらに，$\mathrm{Im}(x) \geqq 0$ に対しては，i を $-i$ におきかえればよい.　□

［証明］

(1)

$$\log \mathcal{S}_r(x) = \frac{x^{r-1}}{r-1} + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty} n^{r-1} \left\{ \log\left(1-\frac{x}{n}\right) + \sum_{l=1}^{r} \frac{1}{l}\left(\frac{x}{n}\right)^{l} \right\}$$

であるので，微分して

$$\begin{aligned}
\frac{\mathcal{S}_r'(x)}{\mathcal{S}_r(x)} &= x^{r-2} + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty} n^{r-1} \left(\frac{1}{x-n} + \sum_{l=1}^{r} \frac{x^{l-1}}{n^l} \right) \\
&= x^{r-2} + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty} n^{r-1} \left(\frac{1}{x-n} + \frac{\left(\frac{x}{n}\right)^r - 1}{x-n} \right) \\
&= x^{r-2} + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty} \frac{x^r}{n(x-n)}
\end{aligned}$$

となる．ただし，

$$\begin{aligned}
\sum_{l=1}^{r} \frac{x^{l-1}}{n^l} &= \frac{1}{n} \sum_{l=1}^{r} \left(\frac{x}{n}\right)^{l-1} \\
&= \frac{1}{n} \cdot \frac{1-\left(\frac{x}{n}\right)^r}{1-\frac{x}{n}} \\
&= \frac{\left(\frac{x}{n}\right)^r - 1}{x-n}
\end{aligned}$$

を用いている．さらに，

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty} \frac{1}{n(x-n)} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(x-n)} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(-n)(x+n)} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n(x-n)} - \frac{1}{n(x+n)} \right) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{x^2-n^2}
\end{aligned}$$

に注意すると

$$\frac{\mathcal{S}_r'(x)}{\mathcal{S}_r(x)} = x^{r-2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2x^r}{x^2-n^2}$$

$$= x^{r-1}\left(x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2x}{x^2-n^2}\right)$$
$$= x^{r-1}\pi\cot(\pi x)$$

となる．

(2)　$F(x)=\mathcal{S}_r(x)$ とおくと，(1)より

$$\frac{1}{\pi x^{r-1}}\cdot\frac{F'(x)}{F(x)} = \cot(\pi x)$$

である．よって

$$\left(\frac{1}{\pi x^{r-1}}\cdot\frac{F'(x)}{F(x)}\right)' = -\frac{\pi}{\sin^2(\pi x)}$$
$$= -\pi((\cot\pi x)^2+1)$$
$$= -\pi\left\{\left(\frac{1}{\pi x^{r-1}}\cdot\frac{F'(x)}{F(x)}\right)^2+1\right\}$$

となる．ここで，

$$\left(\pi^{-1}x^{1-r}\frac{F'}{F}\right)' = \pi^{-1}(1-r)x^{-r}\frac{F'}{F}+\pi^{-1}x^{1-r}\frac{FF''-(F')^2}{F^2}$$

であるから，微分方程式

$$\pi^{-1}(1-r)x^{-r}\frac{F'}{F}+\pi^{-1}x^{1-r}\frac{FF''-(F')^2}{F^2} = -\pi^{-1}x^{2-2r}\frac{(F')^2}{F^2}-\pi$$

を得る．これを整理しよう．まず，両辺に $\pi x^{r-1}F$ をかけて

$$(1-r)x^{-1}F'+F''-(F')^2F^{-1} = -x^{1-r}(F')^2F^{-1}-\pi^2x^{r-1}F$$

となる．よって，2 階代数的微分方程式

$$F''+(x^{1-r}-1)(F')^2F^{-1}-(r-1)x^{-1}F'+\pi^2x^{r-1}F = 0$$

を得る．

(3)　(1)で示した等式

$$\frac{\mathcal{S}_r'(t)}{\mathcal{S}_r(t)} = \pi t^{r-1}\cot(\pi t)$$

を0から x まで積分し，指数関数を取ればよい．

(4)　$\mathrm{Im}(x)<0$ の場合を示す．このときは，

$$\begin{aligned}\left|e^{-2\pi ix}\right| &= e^{2\pi\cdot\mathrm{Im}(x)} \\ &< 1\end{aligned}$$

であることに注意する．いま，(3)の表示

$$\mathcal{S}_r(x)=\exp\left(\int_0^x \pi t^{r-1}\cot(\pi t)dt\right)$$

において，積分路を

$$t=xu,\quad 0\leqq u\leqq 1$$

とすると，

$$\mathcal{S}_r(x)=\exp\left(\pi x^r\int_0^1 u^{r-1}\cot(\pi xu)du\right)$$

となる．ここで，

$$\begin{aligned}\cot(\pi xu) &= \frac{\cos(\pi xu)}{\sin(\pi xu)} \\ &= i\frac{e^{i\pi xu}+e^{-i\pi xu}}{e^{i\pi xu}-e^{-i\pi xu}} \\ &= i\frac{1+e^{-2\pi ixu}}{1-e^{-2\pi ixu}} \\ &= i(1+e^{-2\pi ixu})\sum_{m=0}^{\infty}e^{-2\pi imxu} \\ &= i\left(1+2\sum_{m=1}^{\infty}e^{-2\pi imxu}\right)\end{aligned}$$

を代入すると，

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_r(x) &= \exp\left(\pi ix^r\int_0^1 u^{r-1}du+2\pi ix^r\sum_{m=1}^{\infty}\int_0^1 u^{r-1}e^{-2\pi imxu}du\right) \\ &= \exp\left(\frac{\pi i}{r}x^r+2\pi ix^r\sum_{m=1}^{\infty}\int_0^1 u^{r-1}e^{-2\pi imxu}du\right)\end{aligned}$$

となる．したがって，$\alpha\in\mathbb{C}-\{0\}$ に対して

$$I_r(\alpha)=\int_0^1 u^{r-1}e^{\alpha u}du$$

を計算すればよい．これは，部分積分により

$$\begin{aligned}I_r(\alpha)&=\left[u^{r-1}\frac{e^{\alpha u}}{\alpha}\right]_0^1-\int_0^1(r-1)u^{r-2}\frac{e^{\alpha u}}{\alpha}du\\&=\frac{e^{\alpha}}{\alpha}-\frac{r-1}{\alpha}I_{r-1}(\alpha)\end{aligned}$$

という漸化式と

$$I_1(\alpha)=\frac{e^{\alpha}}{\alpha}-\frac{1}{\alpha}$$

を用いれば

$$I_r(\alpha)=(-1)^{r-1}(r-1)!\frac{e^{\alpha}}{\alpha^r}\sum_{k=0}^{r-1}\frac{(-1)^k\alpha^k}{k!}-(-1)^{r-1}\frac{(r-1)!}{\alpha^r}$$

と求まる．

したがって，$\mathcal{S}_r(x)$ の表示に出てきた積分は

$$\begin{aligned}&2\pi i x^r\sum_{m=1}^{\infty}\int_0^1 u^{r-1}e^{-2\pi imxu}du\\&=2\pi ix^r\sum_{m=1}^{\infty}I_r(-2\pi imx)\\&=2\pi ix^r\sum_{m=1}^{\infty}\left\{(-1)^{r-1}(r-1)!\frac{e^{-2\pi imx}}{(-2\pi imx)^r}\sum_{k=0}^{r-1}\frac{(-1)^k(-2\pi imx)^k}{k!}\right.\\&\qquad\left.-(-1)^{r-1}\frac{(r-1)!}{(-2\pi imx)^r}\right\}\\&=-\frac{(r-1)!}{(2\pi i)^{r-1}}\sum_{k=0}^{r-1}\frac{(2\pi i)^k}{k!}x^k\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(e^{-2\pi ix})^m}{m^{r-k}}\\&\quad+\frac{(r-1)!}{(2\pi i)^{r-1}}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^r}\\&=-\frac{(r-1)!}{(2\pi i)^{r-1}}\sum_{k=0}^{r-1}\frac{(2\pi i)^k}{k!}x^k\mathrm{Li}_{r-k}(e^{-2\pi ix})+\frac{(r-1)!}{(2\pi i)^{r-1}}\zeta(r)\end{aligned}$$

となる．このようにして，

$$\mathcal{S}_r(x)=\exp\left(-\frac{(r-1)!}{(2\pi i)^{r-1}}\sum_{k=0}^{r-1}\frac{(2\pi i)^k}{k!}x^k\mathrm{Li}_{r-k}(e^{-2\pi ix})+\frac{(r-1)!}{(2\pi i)^{r-1}}\zeta(r)+\frac{\pi i}{r}x^r\right)$$

が示された．　[証明終]

練習問題

$r\geqq 2$ に対して，r 重余弦(コサイン)関数を

$$\mathcal{C}_r(x)=\prod_{\substack{n=-\infty \\ n\text{ は奇数}}}^{\infty}P_r\left(\frac{x}{\left(\frac{n}{2}\right)}\right)^{\left(\frac{n}{2}\right)^{r-1}}$$

と定める．これは，一般に，2^{r-1} 価関数である．次のことを証明せよ．

(1)　$\mathcal{C}_r(x)=\exp\left(-\int_0^x \pi t^{r-1}\tan(\pi t)dt\right)$.

(2)　$\mathcal{C}_r(x)$ は $\mathcal{S}_r(x)$ と同じ2階代数的微分方程式をみたす．また，その一般解も求めよ．

(3)　2倍角の公式

$$\mathcal{S}_r(2x)=\mathcal{S}_r(x)^{2^{r-1}}\mathcal{C}_r(x)^{2^{r-1}}.$$

［解答］　(1)(2)(3)とも，$\mathcal{S}_r(x)$ の場合の証明を参照すると，まったく同様である．ここでは，(2)の問題の一般解を考察することにしよう．結論は次のようになる．2階の代数的微分方程式

$$F''+(x^{1-r}-1)(F')^2F^{-1}-(r-1)x^{-1}F'+\pi^2x^{r-1}F=0$$

の一般解は，A,B,α を定数として

$$F(x)=A\cdot\exp\left(\int_\alpha^x \pi it^{r-1}\frac{Be^{2\pi it}+1}{Be^{2\pi it}-1}dt\right)$$

となる．実際，

$$g(x)=x^{1-r}\frac{F'(x)}{F(x)}$$

とおくと，$F(x)$ の 2 階の代数的微分方程式は

$$(\pi^{-1}g(x))' = -\pi\{(\pi^{-1}g(x))^2+1\}$$

つまり

$$g'(x)+g(x)^2+\pi^2 = 0$$

と同値であることがわかる．さらに，この微分方程式は

$$\frac{g'(x)}{g(x)^2+\pi^2} = -1$$

つまり

$$\frac{g'(x)}{g(x)+\pi i}-\frac{g'(x)}{g(x)-\pi i} = 2\pi i$$

と書き直してみると

$$\frac{g(x)+\pi i}{g(x)-\pi i} = Be^{2\pi ix}$$

となる．よって，

$$g(x) = \pi i\frac{Be^{2\pi ix}+1}{Be^{2\pi ix}-1}$$

と求まる．すると

$$\begin{aligned}(\log F(x))' &= x^{r-1}g(x)\\ &= \pi ix^{r-1}\frac{Be^{2\pi ix}+1}{Be^{2\pi ix}-1}\end{aligned}$$

を解いて，

$$F(x) = A\cdot\exp\left(\int_\alpha^x \pi it^{r-1}\frac{Be^{2\pi it}+1}{Be^{2\pi it}-1}dt\right)$$

となる．

ここで，$A=B=1$，$\alpha=0$ のときは

$$\begin{aligned}F(x) &= \exp\left(\int_0^x \pi t^{r-1}\cot(\pi t)dt\right)\\ &= \mathcal{S}_r(x)\end{aligned}$$

となり，$A=1$，$B=-1$，$\alpha=0$ のときは

$$
\begin{aligned}
F(x) &= \exp\left(-\int_0^x \pi t^{r-1}\tan(\pi t)dt\right) \\
&= \mathcal{C}_r(x)
\end{aligned}
$$

となる．　[解答終]

次の定理は，$\mathcal{S}_r(x)$ の周期性と N 倍角の公式を扱っている．

定理 5.1.2　$r\geqq 2$ に対して次が成立する．

(1)　$\mathcal{S}_r(x+1)=\dfrac{\mathcal{S}_r'(1)}{2\pi}\prod_{k=1}^{r}\mathcal{S}_k(x)^{\binom{r-1}{k-1}}$.

(2)　自然数 $N\geqq 2$ に対して定数 $A_r(N)$ が存在して

$$
\begin{aligned}
\mathcal{S}_r(Nx) &= A_r(N)\left(\prod_{l=0}^{N-1}\mathcal{S}_r\left(x+\frac{l}{N}\right)\right)^{N^{r-1}} \\
&\quad\times\prod_{k=1}^{r-1}\prod_{a=0}^{N-1}\mathcal{S}_k\left(x+\frac{a}{N}\right)^{(-1)^{r-k}\binom{r-1}{k-1}a^{r-k}N^{k-1}}.
\end{aligned}
$$

□

注意　§5.8 において，$\mathcal{S}_r'(1)$ の明示公式

$$
\mathcal{S}_r'(1) = -2\pi\exp\left(-2\sum_{\substack{1<l<r \\ l\text{ は奇数}}}\binom{r-1}{l-1}\zeta'(1-l)\right)
$$

を証明する．

[証明]

(1)　まず，ある定数 C が存在して

$$
\mathcal{S}_r(x+1) = C\prod_{k=1}^{r}\mathcal{S}_k(x)^{\binom{r-1}{k-1}}
$$

となることを示そう．そのためには

$$
\frac{d}{dx}\log\left(\frac{\prod_{k=1}^{r}\mathcal{S}_k(x)^{\binom{r-1}{k-1}}}{\mathcal{S}_r(x+1)}\right) = 0
$$

を言えばよい．この等式は

$$\frac{d}{dx}\log \mathcal{S}_r(x+1) = \pi(x+1)^{r-1}\cot(\pi x)$$

および

$$\frac{d}{dx}\log\left(\prod_{k=1}^{r}\mathcal{S}_k(x)^{\binom{r-1}{k-1}}\right) = \sum_{k=1}^{r}\binom{r-1}{k-1}\pi x^{k-1}\cot(\pi x)$$
$$= \pi(x+1)^{r-1}\cot(\pi x)$$

からわかる．ただし，2 項展開

$$(x+1)^{r-1} = \sum_{k=1}^{r}\binom{r-1}{k-1}x^{k-1}$$

を用いた．

さて，定数 C の表示は，

$$\frac{\mathcal{S}_r(x+1)}{\mathcal{S}_1(x)} = C\cdot\prod_{k=2}^{r}\mathcal{S}_k(x)^{\binom{r-1}{k-1}}$$

と変形して，$x\to 0$ とすると

$$\frac{\mathcal{S}_r'(1)}{2\pi} = C$$

と求まる．

(2)　これは(1)とまったく同様である．　[証明終]

5.2　一般周期の多重三角関数：消滅定理

多重フルビッツ・ゼータ関数

$$\zeta_r(s,x,(\omega_1,\cdots,\omega_r)) = \sum_{n_1,\cdots,n_r\geqq 0}(n_1\omega_1+\cdots+n_r\omega_r+x)^{-s}$$
$$= \sum_{\boldsymbol{n}\geqq\boldsymbol{0}}(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\omega}+x)^{-s}$$

を変形した．

$$\xi_r(s,x,(\omega_1,\cdots,\omega_r)) = -\zeta_r(s,x,\boldsymbol{\omega})+(-1)^r\zeta_r(s,|\boldsymbol{\omega}|-x,\boldsymbol{\omega})$$

を導入する．ここで，

$$\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \cdots, \omega_r),$$
$$|\boldsymbol{\omega}| = \omega_1 + \cdots + \omega_r$$

である．

多重ガンマ関数は

$$\Gamma_r(x, \boldsymbol{\omega}) = \exp(\zeta_r'(0, x, \boldsymbol{\omega}))$$

であったから，多重三角関数は

$$S_r(x, \boldsymbol{\omega}) = \exp(\xi_r'(0, x, \boldsymbol{\omega}))$$

と書けることになる．ただし，

$$\zeta_r'(0, x, \boldsymbol{\omega}) = \frac{\partial}{\partial s}\zeta_r(s, x, \boldsymbol{\omega})\Big|_{s=0},$$
$$\xi_r'(0, x, \boldsymbol{\omega}) = \frac{\partial}{\partial s}\xi_r(s, x, \boldsymbol{\omega})\Big|_{s=0}$$

であり，以降では注意なしに使う．

今後の議論において重要となるのは次の定理(消滅定理)であり，多重三角関数論が簡明になる大きな理由を与えている．

定理 5.2.1　消滅定理

$$\xi_r(0, x, \boldsymbol{\omega}) = 0.$$

□

[証明]　多重フルビッツ・ゼータ関数の積分表示(§3.2)を思い起こすと

$$\xi_r(s, x, \boldsymbol{\omega}) = \frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^\infty \varphi(t) t^{s-1} dt,$$
$$\varphi(t) = \frac{-e^{-xt} + (-1)^r e^{-(|\boldsymbol{\omega}|-x)t}}{(1-e^{-\omega_1 t})\cdots(1-e^{-\omega_r t})}$$

となることがわかる．ここで，

$$\varphi(t) = \sum_{n \geqq -r} a_n(x, \boldsymbol{\omega}) t^n$$

とローラン展開したとき，

$$\xi_r(0, x, \boldsymbol{\omega}) = a_0(x, \boldsymbol{\omega})$$

となっている．

さて，$\varphi(t)$ が t について奇関数になること，つまり，

$$\varphi(-t) = -\varphi(t)$$

が成立することを示そう．すると，$a_0(x, \boldsymbol{\omega})=0$ が従うことは明らかである．奇関数となることは，簡単な計算である：

$$\begin{aligned}
\varphi(-t) &= \frac{-e^{xt}+(-1)^r e^{(|\boldsymbol{\omega}|-x)t}}{(1-e^{\omega_1 t})\cdots(1-e^{\omega_r t})} \\
&= \frac{-e^{xt}+(-1)^r e^{(|\boldsymbol{\omega}|-x)t}}{(-1)^r e^{|\boldsymbol{\omega}|t}(1-e^{-\omega_1 t})\cdots(1-e^{-\omega_r t})} \\
&= -\frac{-e^{-xt}+(-1)^r e^{-(|\boldsymbol{\omega}|-x)t}}{(1-e^{-\omega_1 t})\cdots(1-e^{-\omega_r t})} \\
&= -\varphi(t).
\end{aligned}$$

[証明終]

次の基本的な性質も注意しておこう．これも消滅定理の一環である．

定理 5.2.2

(1)　$S_r(0, \boldsymbol{\omega})=0$.

(2)　$S_r'(0, \boldsymbol{\omega})\neq 0$.　▯

[証明]　(1)　定理 3.3.1 より

$$\begin{aligned}
\rho_r(\boldsymbol{\omega}) &= \lim_{x\to 0} \frac{1}{x\Gamma_r(x, \boldsymbol{\omega})} \\
&\neq 0
\end{aligned}$$

である．したがって

$$S_r(x,\boldsymbol{\omega}) = \Gamma_r(x,\boldsymbol{\omega})^{-1}\Gamma_r(|\boldsymbol{\omega}|-x,\boldsymbol{\omega})^{(-1)^r}$$

に対して

$$S_r(x,\boldsymbol{\omega}) = 0$$

がわかる．

(2)　上の表示において

$$\frac{S_r(x,\boldsymbol{\omega})}{x} = \frac{1}{x\Gamma_r(x,\boldsymbol{\omega})}\cdot\Gamma_r(|\boldsymbol{\omega}|-x,\boldsymbol{\omega})^{(-1)^r}$$

とし，$x\to 0$ とすることにより

$$\begin{aligned} S_r'(0,\boldsymbol{\omega}) &= \rho_r(\boldsymbol{\omega})\Gamma_r(|\boldsymbol{\omega}|,\boldsymbol{\omega})^{(-1)^r} \\ &\neq 0 \end{aligned}$$

とわかる．　　　　[証明終]

5.3　周期性

定理 5.3.1

$$S_r(x+\omega_i,\boldsymbol{\omega}) = S_r(x,\boldsymbol{\omega})S_{r-1}(x,\boldsymbol{\omega}\langle i\rangle)^{-1}.$$ ▯

[証明]　多重ガンマ関数に対する周期性(定理 3.5.1)より

$$\Gamma_r(x+\omega_i,\boldsymbol{\omega}) = \Gamma_r(x,\boldsymbol{\omega})\Gamma_{r-1}(x,\boldsymbol{\omega}\langle i\rangle)^{-1}$$

となる．また，

$$\begin{aligned} \Gamma_r(|\boldsymbol{\omega}|-x,\boldsymbol{\omega}) &= \Gamma_r((|\boldsymbol{\omega}|-(x+\omega_i))+\omega_i,\boldsymbol{\omega}) \\ &= \Gamma_r(|\boldsymbol{\omega}|-(x+\omega_i),\boldsymbol{\omega})\Gamma_{r-1}(|\boldsymbol{\omega}|-(x+\omega_i),\boldsymbol{\omega}\langle i\rangle)^{-1} \\ &= \Gamma_r(|\boldsymbol{\omega}|-(x+\omega_i),\boldsymbol{\omega})\Gamma_{r-1}(|\boldsymbol{\omega}\langle i\rangle|-x,\boldsymbol{\omega}\langle i\rangle)^{-1} \end{aligned}$$

なので

$$\Gamma_r(|\boldsymbol{\omega}|-(x+\omega_i),\boldsymbol{\omega}) = \Gamma_r(|\boldsymbol{\omega}|-x,\boldsymbol{\omega})\Gamma_{r-1}(|\boldsymbol{\omega}\langle i\rangle|-x,\boldsymbol{\omega}\langle i\rangle)$$

となる．したがって，

$$\begin{aligned} S_r(x+\omega_i, \boldsymbol{\omega}) &= \Gamma_r(x+\omega_i, \boldsymbol{\omega})^{-1}\Gamma_r(|\boldsymbol{\omega}|-(x+\omega_i), \boldsymbol{\omega})^{(-1)^r} \\ &= (\Gamma_r(x, \boldsymbol{\omega})\Gamma_{r-1}(x, \boldsymbol{\omega}\langle i\rangle)^{-1})^{-1} \\ &\quad \times(\Gamma_r(|\boldsymbol{\omega}|-x, \boldsymbol{\omega})\Gamma_{r-1}(|\boldsymbol{\omega}\langle i\rangle|-x, \boldsymbol{\omega}\langle i\rangle))^{(-1)^r} \\ &= (\Gamma_r(x, \boldsymbol{\omega})^{-1}\Gamma_r(|\boldsymbol{\omega}|-x, \boldsymbol{\omega})^{(-1)^r}) \\ &\quad \times(\Gamma_{r-1}(x, \boldsymbol{\omega}\langle i\rangle)^{-1}\Gamma_{r-1}(|\boldsymbol{\omega}\langle i\rangle|-x, \boldsymbol{\omega}\langle i\rangle)^{(-1)^{r-1}})^{-1} \\ &= S_r(x, \boldsymbol{\omega})S_{r-1}(x, \boldsymbol{\omega}\langle i\rangle)^{-1}. \end{aligned}$$

［証明終］

5.4 N 倍角の公式

通常の三角関数

$$S_1(x) = 2\sin(\pi x)$$

の場合に N 倍角の公式

$$S_1(Nx) = \prod_{k=0}^{N-1} S_1\left(x+\frac{k}{N}\right)$$

が成立していた(§4.1)．この N 倍角の公式は多重三角関数に対して，次のように一般化される．

定理 5.4.1 自然数 $N \geqq 1$ に対して

$$S_r(Nx, \boldsymbol{\omega}) = \prod_{\substack{\boldsymbol{k}=(k_1,\cdots,k_r) \\ k_1,\cdots,k_r=0,\cdots,N-1}} S_r\left(x+\frac{\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{\omega}}{N}, \boldsymbol{\omega}\right).$$

□

［証明］ 2 通りの証明を行なう．

(1) 多重ガンマ関数から

多重ガンマ関数の N 倍角の公式(定理 3.6.1)

$$\Gamma_r(Nx,\boldsymbol{\omega}) = \prod_{\boldsymbol{k}} \Gamma_r\left(x+\frac{\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{\omega}}{N},\boldsymbol{\omega}\right)\times N^{-\zeta_r(0,Nx,\boldsymbol{\omega})}$$

を用いる．ここで，$\boldsymbol{k}=(k_1,\cdots,k_r)$ は $k_1,\cdots,k_r=0,\cdots,N-1$ を動く．

すると，

$$S_r(Nx,\boldsymbol{\omega}) = \Gamma_r(Nx,\boldsymbol{\omega})^{-1}\Gamma_r(|\boldsymbol{\omega}|-Nx,\boldsymbol{\omega})^{(-1)^r}$$

において

$$\Gamma_r(Nx,\boldsymbol{\omega}) = \prod_{\boldsymbol{k}} \Gamma_r\left(x+\frac{\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{\omega}}{N},\boldsymbol{\omega}\right)\times N^{-\zeta_r(0,Nx,\boldsymbol{\omega})}$$

および

$$\begin{aligned}
&\Gamma_r(|\boldsymbol{\omega}|-Nx,\boldsymbol{\omega})\\
&\quad=\Gamma_r\left(N\left(\frac{|\boldsymbol{\omega}|}{N}-x\right),\boldsymbol{\omega}\right)\\
&\quad=\prod_{\boldsymbol{k}}\Gamma_r\left(\frac{|\boldsymbol{\omega}|}{N}-x+\frac{\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{\omega}}{N},\boldsymbol{\omega}\right)\times N^{-\zeta_r(0,|\boldsymbol{\omega}|-Nx,\boldsymbol{\omega})}\\
&\quad=\prod_{\boldsymbol{k}}\Gamma_r\left(|\boldsymbol{\omega}|-\left(x+\frac{((N-1)-k_1)\omega_1+\cdots+((N-1)-k_r)\omega_r}{N}\right),\boldsymbol{\omega}\right)\\
&\qquad\quad\times N^{-\zeta_r(0,|\boldsymbol{\omega}|-Nx,\boldsymbol{\omega})}\\
&\quad=\prod_{\boldsymbol{k}}\Gamma_r\left(|\boldsymbol{\omega}|-\left(x+\frac{\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{\omega}}{N}\right),\boldsymbol{\omega}\right)\times N^{-\zeta_r(0,|\boldsymbol{\omega}|-Nx,\boldsymbol{\omega})}
\end{aligned}$$

を代入することにより

$$\begin{aligned}
S_r(Nx,\boldsymbol{\omega}) &= \prod_{\boldsymbol{k}}\left(\Gamma_r\left(x+\frac{\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{\omega}}{N},\boldsymbol{\omega}\right)^{-1}\Gamma_r\left(|\boldsymbol{\omega}|-\left(x+\frac{\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{\omega}}{N}\right),\boldsymbol{\omega}\right)^{(-1)^r}\right)\\
&\qquad\times N^{\zeta_r(0,Nx,\boldsymbol{\omega})+(-1)^{r+1}\zeta_r(0,|\boldsymbol{\omega}|-Nx,\boldsymbol{\omega})}\\
&=\prod_{\boldsymbol{k}}S_r\left(x+\frac{\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{\omega}}{N},\boldsymbol{\omega}\right)\times N^{-\xi_r(0,Nx,\boldsymbol{\omega})}\\
&=\prod_{\boldsymbol{k}}S_r\left(x+\frac{\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{\omega}}{N},\boldsymbol{\omega}\right)
\end{aligned}$$

とわかる．ただし，定理 5.2.1 より $\xi_r(0,Nx,\boldsymbol{\omega})=0$ であることを使った．

(2)　直接法

$$S_r(Nx,\boldsymbol{\omega})=\exp(\xi_r'(0,Nx,\boldsymbol{\omega}))$$

において

$$\xi_r(s,Nx,\boldsymbol{\omega})=N^{-s}\sum_{\boldsymbol{k}}\xi_r\left(s,x+\frac{\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{\omega}}{N},\boldsymbol{\omega}\right)$$

となることを用いる．この関係式の証明は多重フルビッツ・ゼータ関数の場合(定理 3.6.1 の証明)と同様である(上記の(1)の変形法も参照)．すると，

$$\xi_r'(0,Nx,\boldsymbol{\omega})=\sum_{\boldsymbol{k}}\xi_r'\left(0,x+\frac{\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{\omega}}{N},\boldsymbol{\omega}\right)-(\log N)\sum_{\boldsymbol{k}}\xi_r\left(0,x+\frac{\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{\omega}}{N},\boldsymbol{\omega}\right)$$

となるが，右辺第 2 項は定理 5.2.1 より消えるので，

$$\xi_r'(0,Nx,\boldsymbol{\omega})=\sum_{\boldsymbol{k}}\xi_r'\left(0,x+\frac{\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{\omega}}{N},\boldsymbol{\omega}\right)$$

となる．よって，指数関数をとればよい．

［証明終］

5.5　N 分値の積の公式

N 分値の代数性は難しい問題であるが，N 分値の積は N になる，というわかりやすい関係式を証明する．

定理 5.5.1　自然数 $N \geqq 2$ に対して

$$\prod_{\substack{k_1,\cdots,k_r=0,\cdots,N-1\\(k_1,\cdots,k_r)\neq(0,\cdots,0)}} S_r\left(\frac{k_1\omega_1+\cdots+k_r\omega_r}{N},\boldsymbol{\omega}\right)=N.$$

∎

［証明］　定理 5.4.1 より

$$\prod_{\substack{k_1,\cdots,k_r=0,\cdots,N-1\\(k_1,\cdots,k_r)\neq(0,\cdots,0)}} S_r\left(x+\frac{\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{\omega}}{N},\boldsymbol{\omega}\right)=\frac{S_r(Nx,\boldsymbol{\omega})}{S_r(x,\boldsymbol{\omega})}$$

が成立する．ここで，$x\to0$ とすると

$$\text{左辺} = \prod_{\substack{k_1,\cdots,k_r=0,\cdots,N-1 \\ (k_1,\cdots,k_r)\neq(0,\cdots,0)}} S_r\left(\frac{k_1\omega_1+\cdots+k_r\omega_r}{N},\boldsymbol{\omega}\right),$$

$$\begin{aligned}\text{右辺} &= \lim_{x\to0}\frac{S_r(Nx,\boldsymbol{\omega})}{S_r(x,\boldsymbol{\omega})}\\ &= \frac{N\cdot S_r'(0,\boldsymbol{\omega})}{S_r'(0,\boldsymbol{\omega})}\\ &= N\end{aligned}$$

となるので，定理の等式を得る．ただし，定理 5.2.2 において示された，$S_r(0,\boldsymbol{\omega})=0$, $S_r'(0,\boldsymbol{\omega})\neq0$ を用いた．　　[証明終]

ここで，重要な問題を予想としてあげておこう．

予想　自然数 $N\geqq2$ と，$k_1,\cdots,k_r=0,\cdots,N-1$ に対して

$$S_r\left(\frac{k_1\omega_1+\cdots+k_r\omega_r}{N},\boldsymbol{\omega}\right)\in\overline{\mathbb{Q}}.$$

ここで，$\overline{\mathbb{Q}}$ は代数的数全体からなる体（$\mathbb{Q}$ の $\mathbb{C}$ 内の代数閉包）である．もちろん，$k_1=\cdots=k_r=0$ なら値は 0 とわかるので，実質的なのは，$(k_1,\cdots,k_r)\neq(0,\cdots,0)$ の場合である．たとえば，$N=2$ のときには，次の予想になる：$1\leqq i_1<\cdots<i_k\leqq r$ に対して

$$S_r\left(\frac{\omega_{i_1}+\cdots+\omega_{i_k}}{2},\boldsymbol{\omega}\right)\in\overline{\mathbb{Q}}.$$

また，$r=1$ のときには予想は正しいことが簡単にわかる．それは，§4.6 より

$$S_1(x,\omega)=2\sin\left(\frac{\pi x}{\omega}\right)$$

なので

$$\begin{aligned}S_1\left(\frac{k\omega}{N},\omega\right) &= 2\sin\left(\frac{\pi k}{N}\right)\\ &= \frac{e^{i\frac{\pi k}{N}}-e^{-i\frac{\pi k}{N}}}{i}\end{aligned}$$

という形に1のべき根を用いた表示が得られて

$$S_1\left(\frac{k\omega}{N},\omega\right)\in\overline{\mathbb{Q}}$$

がわかるためである．

ここでは，$r=2$, $N=2$ のときに，上記の予想は正しいことを証明する．

定理 5.5.2

(1) $S_2\left(\frac{\omega_1}{2},(\omega_1,\omega_2)\right)=\sqrt{2}$.

(2) $S_2\left(\frac{\omega_2}{2},(\omega_1,\omega_2)\right)=\sqrt{2}$.

(3) $S_2\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2},(\omega_1,\omega_2)\right)=1$. □

[証明] (1) 定義より

$$S_2\left(\frac{\omega_1}{2},(\omega_1,\omega_2)\right)=\frac{\Gamma_2\left(\frac{\omega_1}{2}+\omega_2,(\omega_1,\omega_2)\right)}{\Gamma_2\left(\frac{\omega_1}{2},(\omega_1,\omega_2)\right)}$$

である．多重ガンマ関数の周期性(定理 3.5.1)を用いると

$$\Gamma_2\left(\frac{\omega_1}{2}+\omega_2,(\omega_1,\omega_2)\right)=\Gamma_2\left(\frac{\omega_1}{2},(\omega_1,\omega_2)\right)\Gamma_1\left(\frac{\omega_1}{2},\omega_1\right)^{-1}$$

となる．よって

$$S_2\left(\frac{\omega_1}{2},(\omega_1,\omega_2)\right)=\Gamma_1\left(\frac{\omega_1}{2},\omega_1\right)^{-1}$$

となる．ここで

$$\Gamma_1(x,\omega)=\frac{\Gamma\left(\frac{x}{\omega}\right)}{\sqrt{2\pi}}\omega^{\frac{x}{\omega}-\frac{1}{2}}$$

という公式(§3.3)を用いれば

$$S_2\left(\frac{\omega_1}{2},(\omega_1,\omega_2)\right)=\left(\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{2\pi}}\right)^{-1}$$

$$= \left(\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2\pi}}\right)^{-1}$$
$$= \sqrt{2}$$

となる.

(2)は(1)とまったく同様である.

(3)は定義からわかる：

$$S_2\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2},(\omega_1,\omega_2)\right) = \frac{\Gamma_2\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2},(\omega_1,\omega_2)\right)}{\Gamma_2\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2},(\omega_1,\omega_2)\right)}$$
$$= 1.$$

[証明終]

5.6　斉次性

多重三角関数の斉次性は簡明である.

定理 5.6.1　$c>0$ に対して

$$S_r(cx, c\boldsymbol{\omega}) = S_r(x, \boldsymbol{\omega}).$$

□

[証明]　多重ガンマ関数の斉次性(定理 3.7.1)

$$\Gamma_r(cx, c\boldsymbol{\omega}) = \Gamma_r(x, \boldsymbol{\omega})c^{-\zeta_r(0,x,\boldsymbol{\omega})}$$

を用いると

$$\Gamma_r(c(|\boldsymbol{\omega}|-x), c\boldsymbol{\omega}) = \Gamma_r(|\boldsymbol{\omega}|-x, \boldsymbol{\omega})c^{-\zeta_r(0,|\boldsymbol{\omega}|-x,\boldsymbol{\omega})}$$

となる. ここで,

$$\Gamma_r(c(|\boldsymbol{\omega}|-x), c\boldsymbol{\omega}) = \Gamma_r(|c\boldsymbol{\omega}|-cx, c\boldsymbol{\omega})$$

であることに注意すると

$$\begin{aligned}S_r(cx,c\boldsymbol{\omega}) &= \Gamma_r(cx,c\boldsymbol{\omega})^{-1}\Gamma_r(|c\boldsymbol{\omega}|-cx,c\boldsymbol{\omega})^{(-1)^r}\\ &= (\Gamma_r(x,\boldsymbol{\omega})c^{-\zeta_r(0,x,\boldsymbol{\omega})})^{-1}\\ &\quad\times(\Gamma_r(|\boldsymbol{\omega}|-x,\boldsymbol{\omega})c^{-\zeta_r(0,|\boldsymbol{\omega}|-x,\boldsymbol{\omega})})^{(-1)^r}\\ &= \Gamma_r(x,\boldsymbol{\omega})^{-1}\Gamma_r(|\boldsymbol{\omega}|-x,\boldsymbol{\omega})^{(-1)^r}c^{-\xi_r(0,x,\boldsymbol{\omega})}\\ &= S_r(x,\boldsymbol{\omega})\end{aligned}$$

となる．ただし，消滅定理(定理 5.2.1)

$$\xi_r(0,x,\boldsymbol{\omega})=0$$

を用いた．

別の方法として

$$S_r(cx,c\boldsymbol{\omega})=\exp(\xi_r'(0,cx,c\boldsymbol{\omega}))$$

を計算してもよい．この場合は

$$\xi_r(s,cx,c\boldsymbol{\omega})=c^{-s}\xi_r(s,x,\boldsymbol{\omega})$$

に注意すると，消滅定理から

$$\begin{aligned}\xi_r'(0,cx,c\boldsymbol{\omega}) &= \xi_r'(0,x,\boldsymbol{\omega})-(\log c)\xi_r(0,x,\boldsymbol{\omega})\\ &= \xi_r'(0,x,\boldsymbol{\omega})\end{aligned}$$

となり

$$\begin{aligned}S_r(cx,c\boldsymbol{\omega}) &= \exp(\xi_r'(0,x,\boldsymbol{\omega}))\\ &= S_r(x,\boldsymbol{\omega})\end{aligned}$$

とわかる． [証明終]

5.7 周期 $(1,\cdots,1)$ の多重三角関数

周期 $\boldsymbol{\omega}=(1,\cdots,1)$ の多重三角関数は簡明な性質を持つので，改めて扱

っておこう．簡単のために

$$S_r(x) = S_r(x, (1, \cdots, 1))$$

と略記する．一般の $S_r(x, \boldsymbol{\omega})$ に対して成立することは，$S_r(x)$ に対しても当然ながら成立するのであるが，$S_r(x)$ 独得の性質も多い．次の定理にまとめておく．

定理 5.7.1　$S_r(x)$ は次の性質をもつ．

(1)（周期性）

$$S_r(x+1) = S_r(x)S_{r-1}(x).$$

(2)（N 倍角）

$$S_r(Nx) = \prod_{k_1, \cdots, k_r = 0, \cdots, N-1} S_r\left(x + \frac{k_1 + \cdots + k_r}{N}\right).$$

(3)（N 分値積）

$$\prod_{\substack{k_1, \cdots, k_r = 0, \cdots, N-1 \\ (k_1, \cdots, k_r) \neq (0, \cdots, 0)}} S_r\left(\frac{k_1 + \cdots + k_r}{N}\right) = N.$$

(4)（微分方程式）

$$S_r'(x) = (-1)^{r-1}\binom{x-1}{r-1}\pi\cot(\pi x)S_r(x).$$

(5)（$\mathcal{S}_r(x)$ との関係）

$$\mathcal{S}_r(x) = C_r \prod_{k=1}^{r} S_k(x)^{c(r,k)},$$

$$S_r(x) = C_r' \prod_{k=1}^{r} \mathcal{S}_k(x)^{c'(r,k)}$$

となる正の定数 C_r, C_r', 整数 $c(r,k)$, および有理数 $c'(r,k)$ が存在する．　□

証明について

上記の性質のうち (1) (2) (3) は，一般周期の $S_r(x, \boldsymbol{\omega})$ に対して成立して

いたものであり，証明済である：(1)は定理 5.3.1，(2)は定理 5.4.1，(3)は定理 5.5.1．(4)(5)の証明には，かなりの頁数が必要となるため，(5)を §5.8 において証明し，(4)は(5)を用いて §5.9 において証明する．

ここには，いくつか(5)の例をあげておこう：

$$S_1(x) = \mathcal{S}_1(x),$$

$$S_2(x) = \mathcal{S}_2(x)^{-1}\mathcal{S}_1(x),$$

$$S_3(x) = e^{-\zeta'(-2)}\mathcal{S}_3(x)^{\frac{1}{2}}\mathcal{S}_2(x)^{-\frac{3}{2}}\mathcal{S}_1(x),$$

$$S_4(x) = e^{-2\zeta'(-2)}\mathcal{S}_4(x)^{-\frac{1}{6}}\mathcal{S}_3(x)\mathcal{S}_2(x)^{-\frac{11}{6}}\mathcal{S}_1(x).$$

$$\mathcal{S}_1(x) = S_1(x),$$

$$\mathcal{S}_2(x) = S_2(x)^{-1}S_1(x),$$

$$\mathcal{S}_3(x) = e^{2\zeta'(-2)}S_3(x)^2 S_2(x)^{-3} S_1(x),$$

$$\mathcal{S}_4(x) = S_4(x)^{-6}S_3(x)^{12}S_2(x)^{-7}S_1(x).$$

5.8　二種類の多重三角関数の関係

この節の目的は次の定理を証明することである．

定理 5.8.1　$r \geqq 1$ に対して

$$\mathcal{S}_r(x) = C_r \prod_{k=1}^{r} S_k(x)^{c(r,k)}$$

が成立する．ここで，

$$C_r = \begin{cases} 1 & r=1 \text{ または } r \text{ は偶数}, \\ e^{2\zeta'(1-r)} & r \text{ は 3 以上の奇数} \end{cases}$$

であり，$c(r,k)$ は

$$c(r,k) = \frac{1}{k}\sum_{l=1}^{k}(-1)^{l-1}\binom{k}{l} l^r$$

と表示される整数である．　□

注意　この定理は，定理 5.7.1 の(5)において，$\mathcal{S}_r(x)$ を $S_r(x)$ によって表示する内容を精確に書いたものである．そこにおける $S_r(x)$ を $\mathcal{S}_r(x)$ によって表示することは，逆に解けばよい．

［証明］　次の順に証明する．基本的には，$r \geqq 2$ としておく．

(1)　$\mathcal{S}_r(x)=e^{P(x)}\prod_{k=1}^{r} S_k(x)^{c(r,k)}$

　となる高々 r 次の多項式 $P(x)$ が存在する．

(2)　$P(x)$ は定数である．

(3)　$P(x)=\begin{cases} 0 & r\text{ は偶数(または }r=1), \\ 2\zeta'(1-r) & r\text{ は 3 以上の奇数}. \end{cases}$

(1)の証明

まず，$c(r,k)$ はスターリング数と呼ばれる組合せ論的な数であり，

$$(-X)^{r-1} = \sum_{k=1}^{r} c(r,k)\binom{X+k-1}{k-1}$$

と展開したときの係数 $c(r,k)\in\mathbb{Z}$ としても定義されることを注意しておこう(2 つの定義の同値性は本節末の練習問題とする)．以下では，後者の定義を用いて計算する．

ここで，

$$\{(-X)^{r-1} \mid r = 1,2,3,\cdots\}$$

および

$$\left\{\binom{X+k-1}{k-1} \;\middle|\; k = 1,2,3,\cdots\right\}$$

は多項式の基底であるから，$c(r,k)$ は基底の変換行列の成分である．た

とえば

$$\begin{cases} c(r,1) = 1, \\ c(r,r) = (-1)^{r-1}(r-1)! \end{cases}$$

となる．

さて，(1)を示すには

$$\frac{d^{r+1}}{dx^{r+1}} \log \mathcal{S}_r(x) = \sum_{k=1}^{r} c(r,k) \frac{d^{r+1}}{dx^{r+1}} \log S_k(x)$$

を示せばよい．ここで，

$$\begin{aligned}
[左辺] &= \frac{d^{r+1}}{dx^{r+1}} \log \left(e^{\frac{x^{r-1}}{r-1}} \prod_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty} P_r\left(\frac{x}{n}\right)^{n^{r-1}} \right) \\
&= \frac{d^{r+1}}{dx^{r+1}} \left\{ \frac{x^{r-1}}{r-1} + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty} n^{r-1} \left(\log\left(1-\frac{x}{n}\right) + \frac{x}{n} + \frac{1}{2}\left(\frac{x}{n}\right)^2 \right.\right. \\
&\qquad \left.\left. + \cdots + \frac{1}{r}\left(\frac{x}{n}\right)^r \right) \right\} \\
&= (-1)^r r! \sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty} \frac{n^{r-1}}{(x-n)^{r+1}} \\
&= (-1)^r r! \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^{r-1}}{(x-n)^{r+1}} + \frac{(-1)^{r-1} n^{r-1}}{(x+n)^{r+1}} \right)
\end{aligned}$$

である．

右辺を計算するには

$$S_k(x) = \exp\left(\frac{\partial}{\partial s} \xi_k(s,x) \Big|_{s=0} \right)$$

を用いる．ここで，

$$\begin{aligned}
\xi_k(s,x) &= \xi_k(s,x,(1,\cdots,1)) \\
&= -\zeta_k(s,x) + (-1)^k \zeta_k(s,k-x), \\
\zeta_k(s,x) &= \zeta_k(s,x,(1,\cdots,1)) \\
&= \sum_{n_1,\cdots,n_k \geqq 0} (n_1+\cdots+n_k+x)^{-s}
\end{aligned}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} {}_kH_n(n+x)^{-s}$$

である．

したがって，$k=1,\cdots,r$ に対して

$$\frac{\partial^{r+1}}{\partial x^{r+1}}\zeta_k(s,x) = (-1)^{r+1}s(s+1)\cdots(s+r)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{{}_kH_n}{(n+x)^{r+1+s}}$$

は $s=0$ において絶対収束することになり，

$$\left.\frac{\partial^{r+2}}{\partial x^{r+1}\partial s}\zeta_k(s,x)\right|_{s=0} = (-1)^{r+1}r!\sum_{n=0}^{\infty}\frac{{}_kH_n}{(n+x)^{r+1}}$$

となる．同様にして

$$\left.\frac{\partial^{r+2}}{\partial x^{r+1}\partial s}\zeta_k(s,k-x)\right|_{s=0} = (-1)^{r+1}r!\sum_{n=0}^{\infty}\frac{{}_kH_n}{(x-n-k)^{r+1}}$$

となる．よって

$$\begin{aligned}\frac{d^{r+1}}{dx^{r+1}}\log S_k(x) &= \left.\frac{\partial^{r+2}}{\partial x^{r+1}\partial s}\left(-\zeta_k(s,x)+(-1)^k\zeta_k(s,k-x)\right)\right|_{s=0} \\ &= (-1)^r r!\sum_{n=0}^{\infty} {}_kH_n\left(\frac{1}{(x+n)^{r+1}}+\frac{(-1)^{k-1}}{(x-n-k)^{r+1}}\right)\end{aligned}$$

となる．したがって

$$\begin{aligned}[\text{右辺}] &= \sum_{k=1}^{r} c(r,k)\frac{d^{r+1}}{dx^{r+1}}\log S_k(x) \\ &= (-1)^r r!\left\{\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{r} c(r,k){}_kH_n\right)\frac{1}{(x+n)^{r+1}}\right. \\ &\qquad \left.+\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{r} c(r,k)(-1)^{k-1}\ {}_kH_n\right)\frac{1}{(x-n-k)^{r+1}}\right\} \\ &= (-1)^r r!\left\{\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{r} c(r,k){}_kH_n\right)\frac{1}{(x+n)^{r+1}}\right. \\ &\qquad \left.+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{r} c(r,k)(-1)^{k-1}\ {}_kH_{n-k}\right)\frac{1}{(x-n)^{r+1}}\right\}\end{aligned}$$

となる．ただし，$n=1,\cdots,k-1$ に対して ${}_kH_{n-k}=0$ となることを使った．

ここで，$c(r,k)$ の定義式

$$\sum_{k=1}^{r} c(r,k)\binom{X+k-1}{k-1} = (-X)^r$$

において $X=n$ とおくと

$$\sum_{k=1}^{r} c(r,k)\binom{n+k-1}{k-1} = (-n)^r$$

となるので

$$\sum_{k=1}^{r} c(r,k)\,{}_kH_n = (-1)^r n^r$$

である．また，$X=-n$ とおくと

$$\sum_{k=1}^{r} c(r,k)\binom{-n+k-1}{k-1} = n^r$$

となるが

$$\begin{aligned}\binom{-n+k-1}{k-1} &= \frac{(-n+k-1)\cdots(-n+1)}{(k-1)!}\\ &= (-1)^{k-1}\binom{n-1}{k-1}\\ &= (-1)^{k-1}\ {}_kH_{n-k}\end{aligned}$$

であるから

$$\sum_{k=1}^{r} c(r,k)(-1)^{k-1}{}_kH_{n-k} = n^r$$

である．

したがって，

$$\begin{aligned}[\text{右辺}] &= (-1)^r r!\left\{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{r-1}n^{r-1}}{(x+n)^{r+1}}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{r-1}}{(x-n)^{r+1}}\right\}\\ &= (-1)^r r!\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n^{r-1}}{(x-n)^{r+1}}+\frac{(-1)^{r-1}n^{r-1}}{(x+n)^{r+1}}\right)\end{aligned}$$

となる．このようにして，[左辺]=[右辺] がわかり，(1)が示された．

(2)の証明

r に関する数学的帰納法を用いる．$r=1$ のときは成立しているので，$r\geqq 2$ を考える．いま，

$$\mathcal{S}_r(x+1)=e^{P(x+1)}\prod_{k=1}^{r}S_k(x+1)^{c(r,k)}$$

を

$$\mathcal{S}_r(x)=e^{P(x)}\prod_{k=1}^{r}S_k(x)^{c(r,k)}$$

によって割ると

$$\frac{\mathcal{S}_r(x+1)}{\mathcal{S}_r(x)}=e^{P(x+1)-P(x)}\prod_{k=1}^{r}\left(\frac{S_k(x+1)}{S_k(x)}\right)^{c(r,k)}$$

となる．ここで，$\mathcal{S}_r(x)$ の周期性(定理 5.1.2(1))より

$$\frac{\mathcal{S}_r(x+1)}{\mathcal{S}_r(x)}=\frac{\mathcal{S}_r'(1)}{2\pi}\prod_{k=1}^{r-1}\mathcal{S}_k(x)^{\binom{r-1}{k-1}}$$

が成立し，$S_k(x)$ の周期性(定理 5.7.1(1))より

$$\frac{S_k(x+1)}{S_k(x)}=S_{k-1}(x)^{-1}$$

であるから，$\mathcal{S}_k(x)\,(k=1,\cdots,r-1)$ に帰納法の仮定を用いると

$$e^{P(x+1)-P(x)}=\prod_{k=1}^{r-1}S_k(x)^{a(k)}\times[\text{定数}]$$

の等式を得る．ただし，$a(k)\in\mathbb{Z}$ である．よって，$x=-n\,(n=1,2,3,\cdots)$ における零点の位数を調べて

$$0=\sum_{k=1}^{r-1}a(k)_kH_n$$

となる．つまり，任意の $n=1,2,3,\cdots$ に対して

$$\sum_{k=1}^{r-1}a(k)\binom{n+k-1}{k-1}=0$$

が成り立つ．よって，多項式

$$\sum_{k=1}^{r-1} a(k)\binom{X+k-1}{k-1}$$

は零多項式であり，$\binom{X+k-1}{k-1}$ が基底であることから

$$a(k)=0 \qquad (k=1,\cdots,r-1)$$

となる．よって

$$e^{P(x+1)-P(x)}=[\text{定数}]$$

となり，

$$P(x)=a+bx$$

となる．このように，$P(x)$ は1次以下の多項式であることがわかった．

次に，$P(x)$ は定数であることを示そう．そのために，2倍角の公式を用いる．まず，

$$\mathcal{S}_r(2x)=e^{P(2x)}\prod_{k=1}^{r} S_k(2x)^{c(r,k)},$$

$$\mathcal{S}_r(x)^{2^{r-1}}=e^{2^{r-1}P(x)}\prod_{k=1}^{r} S_k(x)^{2^{r-1}c(r,k)},$$

$$\mathcal{S}_r\left(x+\frac{1}{2}\right)^{2^{r-1}}=e^{2^{r-1}P\left(x+\frac{1}{2}\right)}\prod_{k=1}^{r} S_k\left(x+\frac{1}{2}\right)^{2^{r-1}c(r,k)}$$

より得られる等式

$$\frac{\mathcal{S}_r(2x)}{\mathcal{S}_r(x)^{2^{r-1}}\mathcal{S}_r\left(x+\frac{1}{2}\right)^{2^{r-1}}}=e^{P(2x)-2^{r-1}P(x)-2^{r-1}P\left(x+\frac{1}{2}\right)}$$

$$\times\prod_{k=1}^{r}\left(\frac{S_k(2x)}{S_k(x)^{2^{r-1}}S_k\left(x+\frac{1}{2}\right)^{2^{r-1}}}\right)^{c(r,k)}$$

に注目する．以下，この左辺と右辺を分析する．

ここで，$\mathcal{S}_r(2x)$ の 2 倍角の公式(定理 5.1.2(2))を用いると

$$[\text{左辺}] = \prod_{k=1}^{r-1} \mathcal{S}_k\left(x+\frac{1}{2}\right)^{(-1)^{r-k}\binom{r-1}{k-1}2^{r-1}} \times[\text{定数}]$$

となる．よって，$\mathcal{S}_k(x)$ $(k=1,\cdots,r-1)$ に対する帰納法の仮定より，ある $b(k)\in\mathbb{Z}$ によって

$$[\text{左辺}] = \prod_{k=1}^{r-1} S_k\left(x+\frac{1}{2}\right)^{b(k)} \times[\text{定数}]$$

と書くことができる．

一方，右辺において，$S_k(x)$ の 2 倍角の公式(定理 5.4.1，定理 5.7.1(2))を用いると

$$\begin{aligned}[\text{右辺}] &= e^{P(2x)-2^{r-1}P(x)-2^{r-1}P\left(x+\frac{1}{2}\right)} \\ &\quad\times \prod_{k=1}^{r} S_k(x)^{c(k)} S_k\left(x+\frac{1}{2}\right)^{d(k)}\end{aligned}$$

となる $c(k), d(k)\in\mathbb{Z}$ が存在することがわかる．

ただし，2 倍角の公式を用いる際には

$$\begin{aligned}
S_1(2x) &= S_1(x)S_1\left(x+\frac{1}{2}\right), \\
S_2(2x) &= S_2(x)S_2\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 S_2(x+1) \\
&= S_2(x)S_2\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 (S_2(x)S_1(x)^{-1}) \\
&= S_2(x)^2 S_2\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 S_1(x)^{-1}, \\
S_3(2x) &= S_3(x)S_3\left(x+\frac{1}{2}\right)^3 S_3(x+1)^3 S_3\left(x+\frac{3}{2}\right) \\
&= S_3(x)S_3\left(x+\frac{1}{2}\right)^3 (S_3(x)S_2(x)^{-1})^3 S_3\left(x+\frac{1}{2}\right) S_2\left(x+\frac{1}{2}\right)^{-1}
\end{aligned}$$

$$= S_3(x)^4 S_3\left(x+\frac{1}{2}\right)^4 S_2(x)^{-3} S_2\left(x+\frac{1}{2}\right)^{-1}$$

のように，$S_k(x)$ と $S_k\left(x+\dfrac{1}{2}\right)$ のみに帰着させて使っている．

したがって，

$$[\text{左辺}] = [\text{右辺}]$$

の等式より，ある $e(k), f(k) \in \mathbb{Z}$ が存在して

$$e^{P(2x)-2^{r-1}P(x)-2^{r-1}P\left(x+\frac{1}{2}\right)} = \prod_{k=1}^{r} S_k(x)^{e(k)} S_k\left(x+\frac{1}{2}\right)^{f(k)} \times [\text{定数}]$$

が成立することがわかる．この両辺の $x=-n, -n-\dfrac{1}{2}$ $(n=1,2,3,\cdots)$ における零点の位数を比較することにより

$$e(k) = f(k) = 0 \qquad (k=1,\cdots,r)$$

がわかる．したがって，

$$e^{P(2x)-2^{r-1}P(x)-2^{r-1}P\left(x+\frac{1}{2}\right)} = [\text{定数}]$$

となる．ここで，$P(x)=a+bx$ を代入すると，$r \geqq 2$ なので，$P(x)=a$ とわかる．

(3)の証明

次の 3 つの等式を用いる．

(a)

$$\mathcal{S}_r'(1) = -2\pi\cdot\exp\left(-2\sum_{\substack{1<l<r\\ l\text{ は奇数}}}\binom{r-1}{l-1}\zeta'(1-l)\right).$$

(b) $a(r,k) \in \mathbb{Q}$ を

$$\binom{X+r-2}{r-1} = \sum_{k=1}^{r-1} a(r,k) X^k$$

によって定義すると

$$S_r(1) = \exp\left(-2\sum_{\substack{1<l\leqq r\\ l\text{ は奇数}}} a(r,l-1)\zeta'(1-l)\right).$$

(c)

$$\sum_{k=l}^{r} c(r,k)a(k,l-1) = (-1)^{l-1}\binom{r-1}{l-1}.$$

(a)(b)(c)の証明はあとにまわし，この3つを用いて

$$C_r = \begin{cases} 1 & r：偶数, \\ e^{2\zeta'(1-r)} & r \geqq 1：奇数 \end{cases}$$

となることを示しておこう．

まず，

$$\begin{aligned} C_r &= \mathcal{S}_r(x)\prod_{k=1}^{r} S_k(x)^{-c(r,k)} \\ &= \frac{\mathcal{S}_r(x)}{S_1(x)}\prod_{k=2}^{r} S_k(x)^{-c(r,k)} \end{aligned}$$

に注意する．ただし，$c(r,1)=1$ となることを用いている．したがって，$x\to 1$ とすることにより

$$C_r = \frac{\mathcal{S}_r'(1)}{S_1'(1)}\prod_{k=2}^{r} S_k(1)^{-c(r,k)}$$

となる．ここで，(a)の $\mathcal{S}_r'(1)$ の式，(b)の $S_k(1)$ の式，および $S_1'(1)=-2\pi$ を代入すると

$$\begin{aligned} C_r = \exp\Bigg(&-2\sum_{\substack{1<l<r\\ l\text{ は奇数}}}\binom{r-1}{l-1}\zeta'(1-l) \\ &+2\sum_{\substack{1<l\leqq r\\ l\text{ は奇数}}}\left(\sum_{k=1}^{r} c(r,k)a(k,l-1)\right)\zeta'(1-l)\Bigg) \end{aligned}$$

となる．よって，(c)の等式を用いて

$$C_r = \begin{cases} e^{2\zeta'(1-r)} & r \geqq 3 \text{ 奇数}, \\ 1 & r \geqq 2 \text{ 偶数} \end{cases}$$

となることがわかる．

以下，(a)(b)(c)を証明する．

(a)の証明

定理 5.1.1(4)を(極限を取ることにより) $0<x<1$ に対して用いる：

$$\mathcal{S}_r(x) = \exp\left(-\frac{(r-1)!}{(2\pi i)^{r-1}}\sum_{k=0}^{r-1}\frac{(2\pi ix)^k}{k!}\mathrm{Li}_{r-k}(e^{-2\pi ix}) + \frac{\pi i}{r}x^r + \frac{(r-1)!}{(2\pi i)^{r-1}}\zeta(r)\right).$$

ここで，$k=r-1$ の項を取り出すと

$$\begin{aligned}\exp(-x^{r-1}\mathrm{Li}_1(e^{-2\pi ix})) &= \exp(x^{r-1}\log(1-e^{-2\pi ix})) \\ &= \exp(x^{r-1}\log(e^{-\pi ix}(e^{\pi ix}-e^{-\pi ix}))) \\ &= \exp\left(x^{r-1}\left(-\pi ix+\frac{\pi i}{2}+\log(2\sin\pi x)\right)\right) \\ &= (2\sin\pi x)^{x^{r-1}}\exp\left(-\pi ix^r+\frac{\pi i}{2}x^{r-1}\right)\end{aligned}$$

となるので

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_r(x) &= (2\sin\pi x)^{x^{r-1}} \\ &\quad\times\exp\left(-\frac{(r-1)!}{(2\pi i)^{r-1}}\sum_{k=0}^{r-2}\frac{(2\pi ix)^k}{k!}\mathrm{Li}_{r-k}(e^{-2\pi ix})\right. \\ &\qquad\left. + \frac{\pi i}{r}x^r - \pi ix^r + \frac{\pi i}{2}x^{r-1} + \frac{(r-1)!}{(2\pi i)^{r-1}}\zeta(r)\right)\end{aligned}$$

となっている．したがって，

$$\frac{\mathcal{S}_r(x)}{1-x} = \left(\frac{2\sin\pi x}{1-x}\right)^{x^{r-1}} (1-x)^{x^{r-1}-1}$$
$$\times \exp\left(-\frac{(r-1)!}{(2\pi i)^{r-1}}\sum_{k=0}^{r-2}\frac{(2\pi i x)^k}{k!}\mathrm{Li}_{r-k}(e^{-2\pi i x})\right.$$
$$\left.+\frac{\pi i}{r}x^r - \pi i x^r + \frac{\pi i}{2}x^{r-1} + \frac{(r-1)!}{(2\pi i)^{r-1}}\zeta(r)\right)$$

である．ここで，$0<x<1$ において $x\to 1$ とすると

$$-\mathcal{S}_r'(1) = (2\pi)\times 1$$
$$\times \exp\left(-\frac{(r-1)!}{(2\pi i)^{r-1}}\sum_{k=0}^{r-2}\frac{(2\pi i)^k}{k!}\mathrm{Li}_{r-k}(1)\right.$$
$$\left.+\frac{\pi i}{r} - \pi i + \frac{\pi i}{2} + \frac{(r-1)!}{(2\pi i)^{r-1}}\zeta(r)\right)$$
$$= 2\pi\cdot\exp\left(-\frac{(r-1)!}{(2\pi i)^{r-1}}\sum_{k=1}^{r-2}\frac{(2\pi i)^k}{k!}\zeta(r-k) + \left(\frac{1}{r}-\frac{1}{2}\right)\pi i\right).$$

ここで，$\mathcal{S}_r(x)$ は $0<x<1$ において，$\mathcal{S}_r(x)>0$ であり $\mathcal{S}_r(1)=0$ なので $\mathcal{S}_r'(1)\leqq 0$ に注意すると，$-\mathcal{S}_r'(1)\geqq 0$ となることがわかるため，

$$-\mathcal{S}_r'(1) = 2\pi\cdot\exp\left(\mathrm{Re}\left(-\frac{(r-1)!}{(2\pi i)^{r-1}}\sum_{k=1}^{r-2}\frac{(2\pi i)^k}{k!}\zeta(r-k) + \left(\frac{1}{r}-\frac{1}{2}\right)\pi i\right)\right)$$
$$= \begin{cases} 2\pi\cdot\exp\left(-\dfrac{(r-1)!}{(2\pi)^{r-1}}\displaystyle\sum_{\substack{1\leqq k\leqq r-3\\ k\text{ は奇数}}}\dfrac{(2\pi)^k(-1)^{\frac{k-r+1}{2}}}{k!}\zeta(r-k)\right) & r\text{ は偶数}, \\ 2\pi\cdot\exp\left(-\dfrac{(r-1)!}{(2\pi)^{r-1}}\displaystyle\sum_{\substack{2\leqq k\leqq r-3\\ k\text{ は偶数}}}\dfrac{(2\pi)^k(-1)^{\frac{k-r+1}{2}}}{k!}\zeta(r-k)\right) & r\geqq 3\text{ は奇数} \end{cases}$$

となる．よって，r が偶奇いずれの場合でも $r-k=l$ とおくと

$$\mathcal{S}_r'(1) = -2\pi\cdot\exp\left(-(r-1)!\sum_{\substack{1<l<r\\ l\text{ は奇数}}}\frac{(-1)^{\frac{l-1}{2}}}{(r-l)!(2\pi)^{l-1}}\zeta(l)\right)$$

という表示にまとめることができる．

ここで，リーマン・ゼータ関数の関数等式を用いると，奇数 $l \geqq 3$ に対して

$$\zeta(l) = \frac{(2\pi)^{l-1} 2(-1)^{\frac{l-1}{2}}}{(l-1)!} \zeta'(1-l)$$

となることがわかる．よって

$$\begin{aligned} \mathcal{S}'_r(1) &= -2\pi \cdot \exp\left(-(r-1)! \sum_{\substack{1<l<r \\ l \text{ は奇数}}} \frac{2}{(r-l)!(l-1)!} \zeta'(1-l) \right) \\ &= -2\pi \cdot \exp\left(-2 \sum_{\substack{1<l<r \\ l \text{ は奇数}}} \binom{r-1}{l-1} \zeta'(1-l) \right) \end{aligned}$$

となることが証明された．

(b)の証明

求めるものは

$$S_r(1) = \Gamma_r(1)^{-1} \Gamma_r(r-1)^{(-1)^r}$$

である．まず，

$$\Gamma_r(1) = \exp(\zeta'_r(0,1)),$$

$$\Gamma_r(r-1) = \exp(\zeta'_r(0,r-1))$$

となる．ただし，

$$\zeta_r(s,x) = \sum_{n=0}^{\infty} {}_rH_n (n+x)^{-s}$$

である．したがって，

$$\begin{aligned} \zeta_r(s,1) &= \sum_{n=0}^{\infty} {}_rH_n (n+1)^{-s} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} {}_rH_{n-1} n^{-s} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{n=1}^{\infty} \binom{n+r-2}{r-1} n^{-s} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{r-1} a(r,k) n^k \right) n^{-s} \\
&= \sum_{k=1}^{r-1} a(r,k)\zeta(s-k)
\end{aligned}
$$

となることから

$$
\zeta_r'(0,1) = \sum_{k=1}^{r-1} a(r,k)\zeta'(-k)
$$

を得る．

次に，

$$
\begin{aligned}
\zeta_r(s,r-1) &= \sum_{n=0}^{\infty} {}_rH_n(n+r-1)^{-s} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} {}_rH_{n-r+1} n^{-s}
\end{aligned}
$$

となる．ここで，$n=1,2,\cdots,r-2$ のとき，${}_rH_{n-r+1}=0$ であることを使った．また，

$$
\begin{aligned}
{}_rH_{n-r+1} &= \frac{n(n-1)\cdots(n-r+2)}{(r-1)!} \\
&= (-1)^{r-1}{}_rH_{-n-1}
\end{aligned}
$$

に注意すると

$$
\begin{aligned}
\zeta_r(s,r-1) &= (-1)^{r-1} \sum_{n=1}^{\infty} {}_rH_{-n-1} n^{-s} \\
&= (-1)^{r-1} \sum_{n=1}^{\infty} \binom{-n+r-2}{r-1} n^{-s} \\
&= (-1)^{r-1} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{r-1} a(r,k)(-n)^k \right) n^{-s} \\
&= (-1)^{r-1} \sum_{k=1}^{r-1} a(r,k)(-1)^k \zeta(s-k)
\end{aligned}
$$

となることから

$$\zeta_r'(0, r-1) = (-1)^{r-1} \sum_{k=1}^{r-1} a(r,k)(-1)^k \zeta'(-k)$$

を得る．

このようにして，

$$S_r(1) = \exp\left(-2 \sum_{\substack{2 \leqq k \leqq r-1 \\ k \text{ は偶数}}} a(r,k)\zeta'(-k) \right)$$
$$= \exp\left(-2 \sum_{\substack{3 \leqq l \leqq r \\ l \text{ は奇数}}} a(r,l-1)\zeta'(1-l) \right)$$

となることが証明された．

(c)の証明

等式

$$(-1)^{r-1}(X-1)^{r-1} = \sum_{k=1}^{r} c(r,k) \binom{X+k-2}{k-1}$$
$$= \sum_{k=1}^{r} c(r,k) \left(\sum_{l=1}^{k} a(k,l-1) X^{l-1} \right)$$
$$= \sum_{l=1}^{r} \left(\sum_{k=l}^{r} c(r,k) a(k,l-1) \right) X^{l-1}$$

において，X^{l-1} の係数を比較することによって

$$(-1)^{l-1} \binom{r-1}{l-1} = \sum_{k=l}^{r} c(r,k) a(k,l-1)$$

となり，証明された．

以上で，定理 5.8.1 の証明が完了した． ［証明終］

練習問題

$c(r,k)$ を

$$(-X)^{r-1}=\sum_{k=1}^{r}c(r,k)\binom{X+k-1}{k-1}$$

によって定めたとき

$$c(r,k)=\frac{1}{k}\sum_{l=1}^{k}(-1)^{l-1}\binom{k}{l}l^{r}$$

となることを証明せよ．

［解答］　条件の等式において $X=-l$ とおくことにより

$$\begin{aligned}l^{r-1}&=\sum_{k=1}^{r}c(r,k)\binom{-l+k-1}{k-1}\\&=\sum_{k=1}^{r}c(r,k)\,{}_{k}H_{-l}\end{aligned}$$

を得る．よって

$$\begin{aligned}\frac{1}{k}\sum_{l=1}^{k}(-1)^{l-1}\binom{k}{l}l^{r}&=\frac{1}{k}\sum_{l=1}^{k}(-1)^{l-1}\binom{k}{l}l\cdot l^{r-1}\\&=\frac{1}{k}\sum_{l=1}^{k}(-1)^{l-1}\binom{k}{l}l\left(\sum_{j=1}^{r}c(r,j)\,{}_{j}H_{-l}\right)\end{aligned}$$

となる．ここで，

$$\begin{aligned}{}_{j}H_{-l}&=\binom{j-l-1}{j-1}\\&=(-1)^{j-1}\binom{l-1}{j-1}\end{aligned}$$

なので

$$\frac{1}{k}\sum_{l=1}^{k}(-1)^{l-1}\binom{k}{l}l^r = \frac{1}{k}\sum_{l=1}^{k}\sum_{j=1}^{l}(-1)^{l+j}\binom{k}{l}\binom{l-1}{j-1}l\cdot c(r,j)$$

$$= \sum_{j=1}^{k} c(r,j)\binom{k-1}{j-1}\left(\sum_{l=j}^{k}(-1)^{l-j}\binom{k-j}{k-l}\right)$$

が成り立つことがわかる．ところで，

$$\sum_{l=j}^{k}(-1)^{l-j}\binom{k-j}{k-l} = (1-1)^{k-j}$$

$$= \begin{cases} 0 & j \neq k, \\ 1 & j = k \end{cases}$$

であるから，

$$\frac{1}{k}\sum_{l=1}^{k}(-1)^{l-1}\binom{k}{l}l^r = c(r,k)\binom{k-1}{k-1}$$

$$= c(r,k)$$

が示された． ［解答終］

5.9 微分方程式

この節の目的は，$S_r(x)$ が次の微分方程式をみたすことを示すことである．

定理 5.9.1

$$S_r'(x) = (-1)^{r-1}\binom{x-1}{r-1}\pi\cot(\pi x)S_r(x).$$

□

［証明］ 定理 5.7.1(5)［定理 5.8.1 および注意参照］より

$$S_r(x) = C_r'\prod_{k=1}^{r}\mathcal{S}_k(x)^{c'(r,k)}$$

なので，対数微分をとると

$$\frac{S_r'(x)}{S_r(x)} = \sum_{k=1}^{r} c'(r,k)\frac{\mathcal{S}_k'(x)}{\mathcal{S}_k(x)}$$

となる．ここで，$\mathcal{S}_k(x)$ に対する微分方程式(定理 5.1.1(1))

$$\frac{\mathcal{S}_k'(x)}{\mathcal{S}_k(x)} = x^{k-1}\pi\cot(\pi x)$$

を用いて，

$$\frac{S_r'(x)}{S_r(x)} = \left(\sum_{k=1}^{r} c'(r,k)x^{k-1}\right)\pi\cot(\pi x)$$

を得る．

ところで，有理数 $c'(r,k)$ $(k=1,\cdots,r)$ の分母の最小公倍数を N とすると

$$S_r(x)^N = (C_r')^N \prod_{k=1}^{r} \mathcal{S}_k(x)^{Nc'(r,k)}$$

という有理型関数の等式になる．ここで，両辺の $x=-m$ $(m=1,2,3,\cdots)$ における零点の位数を比較すると

$$N\cdot {}_rH_m = \sum_{k=1}^{r} N\cdot c'(r,k)(-m)^{k-1}$$

となる．よって

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{r} c'(r,k)(-m)^{k-1} &= {}_rH_m \\ &= \frac{(m+r-1)\cdots(m+1)}{(r-1)!} \\ &= (-1)^{r-1}\frac{(-m-1)\cdots(-m-r+1)}{(r-1)!}\end{aligned}$$

が $m=1,2,3,\cdots$ に対して成立する．したがって，多項式としての等式

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{r} c'(r,k)X^{k-1} &= (-1)^{r-1}\frac{(X-1)\cdots(X-r+1)}{(r-1)!} \\ &= (-1)^{r-1}\binom{X-1}{r-1}\end{aligned}$$

を得る．このようにして，

$$\frac{S_r'(x)}{S_r(x)} = (-1)^{r-1}\binom{x-1}{r-1}\pi\cot(\pi x)$$

がわかる． [証明終]

注意 この微分方程式を用いると，§5.1 と同じく，多重三角関数が代数的微分方程式をみたすことがわかる．一方，多重ガンマ関数は，代数的微分方程式をみたさない，ということが知られている．これは通常のガンマ関数の場合にはヘルダーの結果である．このように，「代数的な多重三角関数」と「超越的な多重ガンマ関数」は対照的である．

5.10 ゼータ関数の特殊値表示

本節では，多重三角関数の等分値とゼータ関数・L 関数の特殊値との関係を具体的な場合を中心に述べる．

代表例は

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$$

と

$$L(s) = \sum_{\substack{n \geqq 1 \\ \text{奇数}}}\frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n^s}$$

の場合である．特殊値

$$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}, \quad \zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}, \quad \cdots$$
$$L(1) = \frac{\pi}{4}, \quad L(3) = \frac{\pi^3}{32}, \quad \cdots$$

はよく知られている．有名な未解決問題は $\zeta(3)$ および $L(2)$ を求めることである．後者の $L(2)$ はカタラン定数と呼ばれ，G と書かれることが多い(§4.3 の練習問題参照)．多重三角関数による表示を証明しよう．

定理 5.10.1

(1)　$\zeta(3)=\frac{16\pi^2}{3}\log\left(S_3\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}2^{\frac{3}{8}}\right).$

(2)　$L(2)=2\pi\log\left(S_2\left(\frac{1}{4}\right)^{-1}2^{\frac{3}{8}}\right).$ ▯

注意　(1)，(2)は，それぞれ多重三角関数の等分値の表示ともなる：

(1)′　$S_3\left(\frac{1}{2}\right)=2^{\frac{3}{8}}\exp\left(-\frac{3\zeta(3)}{16\pi^2}\right)=2^{\frac{3}{8}}e^{\frac{3}{4}\zeta'(-2)}.$

(2)′　$S_2\left(\frac{1}{4}\right)=2^{\frac{3}{8}}\exp\left(-\frac{L(2)}{8\pi}\right)=2^{\frac{3}{8}}e^{-\frac{1}{4}L'(-1)}.$

[証明]

(1)　表示

$$S_3\left(\frac{1}{2}\right)=\exp\left(\xi_3'\left(0,\frac{1}{2}\right)\right),$$

$$\xi_3\left(s,\frac{1}{2}\right)=-\zeta_3\left(s,\frac{1}{2}\right)-\zeta_3\left(s,\frac{5}{2}\right)$$

から値を求めよう．計算を簡明にするために

$$\begin{aligned}\varphi(s)&=\sum_{n=0}^{\infty}\left(n+\frac{1}{2}\right)^{-s}\\&=2^s\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)^{-s}\\&=(2^s-1)\zeta(s)\end{aligned}$$

とおく．すると，

$$\begin{aligned}\zeta_3\left(s,\frac{1}{2}\right)&=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)\left(n+\frac{1}{2}\right)^{-s}\\&=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}\right)\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)+\frac{3}{2}\right)\left(n+\frac{1}{2}\right)^{-s}\\&=\frac{1}{2}\left\{\varphi(s-2)+2\varphi(s-1)+\frac{3}{4}\varphi(s)\right\}\end{aligned}$$

および

$$\begin{aligned}
\zeta_3\left(s,\frac{5}{2}\right) &= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)\left(n+\frac{5}{2}\right)^{-s} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{n=-2}^{\infty}(n+1)(n+2)\left(n+\frac{5}{2}\right)^{-s} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(n-1)n\left(n+\frac{1}{2}\right)^{-s} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)-\frac{3}{2}\right)\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}\right)\left(n+\frac{1}{2}\right)^{-s} \\
&= \frac{1}{2}\left\{\varphi(s-2)-2\varphi(s-1)+\frac{3}{4}\varphi(s)\right\}
\end{aligned}$$

より

$$\xi_3\left(s,\frac{1}{2}\right) = -\varphi(s-2)-\frac{3}{4}\varphi(s)$$

を得る．したがって，

$$S_3\left(\frac{1}{2}\right) = \exp\left(-\varphi'(-2)-\frac{3}{4}\varphi'(0)\right)$$

である．ここで，

$$\begin{aligned}
\varphi'(-2) &= (2^{-2}-1)\zeta'(-2) \\
&= -\frac{3}{4}\zeta'(-2),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\varphi'(0) &= (\log 2)\zeta(0) \\
&= -\frac{1}{2}\log 2
\end{aligned}$$

であるから

$$\begin{aligned}
S_3\left(\frac{1}{2}\right) &= 2^{\frac{3}{8}}\exp\left(\frac{3}{4}\zeta'(-2)\right) \\
&= 2^{\frac{3}{8}}\exp\left(-\frac{3\zeta(3)}{16\pi^2}\right)
\end{aligned}$$

が示された．

(2)　表示

$$S_2\left(\frac{1}{4}\right) = \exp\left(\xi_2'\left(0,\frac{1}{4}\right)\right),$$

$$\xi_2\left(s, \frac{1}{4}\right) = -\zeta_2\left(s, \frac{1}{4}\right) + \zeta_2\left(s, \frac{7}{4}\right)$$

から出発する．ここで,

$$\xi_2\left(s, \frac{1}{4}\right) = -4^{s-1}L(s-1) - 3\cdot 4^{s-1}(1-2^{-s})\zeta(s)$$

という表示を得ることができる．実際,

$$\varphi_{4,1}(s) = \sum_{n=0}^{\infty}(4n+1)^{-s},$$
$$\varphi_{4,3}(s) = \sum_{n=0}^{\infty}(4n+3)^{-s}$$

とおくと,

$$\begin{aligned}\zeta_2\left(s, \frac{1}{4}\right) &= \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\left(n+\frac{1}{4}\right)^{-s} \\ &= 4^s\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(4n+1)^{-s} \\ &= 4^{s-1}\sum_{n=0}^{\infty}((4n+1)+3)(4n+1)^{-s} \\ &= 4^{s-1}\{\varphi_{4,1}(s-1)+3\varphi_{4,1}(s)\},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\zeta_2\left(s, \frac{7}{4}\right) &= \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\left(n+\frac{7}{4}\right)^{-s} \\ &= \sum_{n=-1}^{\infty}(n+1)\left(n+\frac{7}{4}\right)^{-s} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}n\left(n+\frac{3}{4}\right)^{-s} \\ &= 4^s\sum_{n=0}^{\infty}n(4n+3)^{-s} \\ &= 4^{s-1}\sum_{n=0}^{\infty}((4n+3)-3)(4n+3)^{-s} \\ &= 4^{s-1}\{\varphi_{4,3}(s-1)-3\varphi_{4,3}(s)\}\end{aligned}$$

より

$$\xi_2\left(s, \frac{1}{4}\right) = -4^{s-1}\{\varphi_{4,1}(s-1)-\varphi_{4,3}(s-1)\}$$
$$-3\cdot 4^{s-1}\{\varphi_{4,1}(s)+\varphi_{4,3}(s)\}$$

となるので

$$\varphi_{4,1}(s)-\varphi_{4,3}(s) = L(s),$$
$$\varphi_{4,1}(s)+\varphi_{4,3}(s) = (1-2^{-s})\zeta(s)$$

を用いればよい．

したがって，$L(-1)=0$ に注意すると，

$$\xi_2'\left(0, \frac{1}{4}\right) = -4^{-1}L'(-1)-3\cdot 4^{-1}(\log 2)\zeta(0)$$
$$= -\frac{1}{4}L'(-1)+\frac{3}{8}\log 2$$

となり

$$S_2\left(\frac{1}{4}\right) = 2^{\frac{3}{8}}\exp\left(-\frac{1}{4}L'(-1)\right)$$
$$= 2^{\frac{3}{8}}\exp\left(-\frac{L(2)}{8\pi}\right)$$

が示された． [証明終]

練習問題

(1) $S_3(x)$ の 2 分値を求めて

$$S_3\left(\frac{1}{2}\right)^3 S_3(1)^3 S_3\left(\frac{3}{2}\right) = 2$$

となることを確かめよ．

(2) $S_2(x)$ の 4 分値を求めて

$$S_2\left(\frac{1}{4}\right)^2 S_2\left(\frac{1}{2}\right)^3 S_2\left(\frac{3}{4}\right)^4 S_2(1)^3 S_2\left(\frac{5}{4}\right)^2 S_2\left(\frac{3}{2}\right) = 4$$

となることを確かめよ．

[解答]

(1)　$S_3(x)$ の2分値の積は，一般論(定理 5.5.1，定理 5.7.1(3))から

$$\prod_{\substack{k_1,k_2,k_3=0,1\\(k_1,k_2,k_3)\neq(0,0,0)}} S_3\left(\frac{k_1+k_2+k_3}{2}\right)=2,$$

つまり

$$S_3\left(\frac{1}{2}\right)^3 S_3(1)^3 S_3\left(\frac{3}{2}\right)=2$$

である．これを，各項を明示的に求めることにより確かめよう．定理 5.10.1(1)の証明において

$$\begin{aligned} S_3\left(\frac{1}{2}\right)&=2^{\frac{3}{8}}\exp\left(\frac{3}{4}\zeta'(-2)\right)\\ &=2^{\frac{3}{8}}\exp\left(-\frac{3\zeta(3)}{16\pi^2}\right)\end{aligned}$$

を示した．なお，

$$\zeta(3)=-4\pi^2\zeta'(-2)$$

である．

まったく同様にして，

$$\begin{aligned} S_3(1)&=\exp(-\zeta'(-2))\\ &=\exp\left(\frac{\zeta(3)}{4\pi^2}\right),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_3\left(\frac{3}{2}\right)&=2^{-\frac{1}{8}}\exp\left(\frac{3}{4}\zeta'(-2)\right)\\ &=2^{-\frac{1}{8}}\exp\left(-\frac{3\zeta(3)}{16\pi^2}\right)\end{aligned}$$

が示される．つまり，

$$\zeta(3)=\frac{16\pi^2}{3}\log\left(S_3\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}2^{\frac{3}{8}}\right),$$

$$\zeta(3) = 4\pi^2 \log S_3(1),$$
$$\zeta(3) = \frac{16\pi^2}{3} \log\left(S_3\left(\frac{3}{2}\right)^{-1} 2^{-\frac{1}{8}} \right)$$

が示されることになる．計算の要点を記そう．まず，

$$S_3(1) = \exp(\xi_3'(0,1))$$

については

$$\xi_3(s,1) = -\zeta_3(s,1) - \zeta_3(s,2)$$

であるが，

$$\begin{aligned}\zeta_3(s,1) &= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)(n+1)^{-s}\\ &= \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)n^{-s}\\ &= \frac{1}{2}\{\zeta(s-2)+\zeta(s-1)\},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\zeta_3(s,2) &= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)(n+2)^{-s}\\ &= \frac{1}{2}\sum_{n=-1}^{\infty}(n+1)(n+2)(n+2)^{-s}\\ &= \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(n-1)n\cdot n^{-s}\\ &= \frac{1}{2}\{\zeta(s-2)-\zeta(s-1)\}\end{aligned}$$

より

$$\xi_3(s,1) = -\zeta(s-2)$$

となる．よって

$$\begin{aligned}S_3(1) &= \exp(-\zeta'(-2))\\ &= \exp\left(\frac{\zeta(3)}{4\pi^2}\right)\end{aligned}$$

がわかる．次に

$$S_3\left(\frac{3}{2}\right)=\exp\left(\xi_3'\left(0,\frac{3}{2}\right)\right)$$

については

$$\varphi(s)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(n+\frac{1}{2}\right)^{-s}=(2^s-1)\zeta(s)$$

によって

$$\xi_3\left(s,\frac{3}{2}\right)=-\varphi(s-2)+\frac{1}{4}\varphi(s)$$

と書けるので，

$$\begin{aligned}\xi_3'\left(0,\frac{3}{2}\right)&=-\varphi'(-2)+\frac{1}{4}\varphi'(0)\\&=\frac{3}{4}\zeta'(-2)-\frac{1}{8}\log 2\end{aligned}$$

より

$$\begin{aligned}S_3\left(\frac{3}{2}\right)&=2^{-\frac{1}{8}}\exp\left(\frac{3}{4}\zeta'(-2)\right)\\&=2^{-\frac{1}{8}}\exp\left(-\frac{3\zeta(3)}{16\pi^3}\right)\end{aligned}$$

とわかる．一方，周期性から

$$\begin{aligned}S_3\left(\frac{3}{2}\right)&=S_3\left(\frac{1}{2}\right)S_2\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}\\&=S_3\left(\frac{1}{2}\right)2^{-\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

として，$S_3\left(\frac{1}{2}\right)$ の値を代入しても得られる．

このようにして，

$$\begin{aligned}&S_3\left(\frac{1}{2}\right)^3 S_3(1)^3 S_3\left(\frac{3}{2}\right)\\&=\left\{2^{\frac{3}{8}}\exp\left(-\frac{3\zeta(3)}{16\pi^2}\right)\right\}^3\left\{\exp\left(\frac{\zeta(3)}{4\pi^2}\right)\right\}^3\left\{2^{-\frac{1}{8}}\exp\left(-\frac{3\zeta(3)}{16\pi^2}\right)\right\}\\&=2\end{aligned}$$

が確かめられる．

(2) $S_2(x)$ の 4 分値の積は，一般論(定理 5.5.1，定理 5.7.1(3))より

$$\prod_{\substack{k_1,k_2=0,1,2,3\\(k_1,k_2)\neq(0,0)}} S_2\left(\frac{k_1+k_2}{4}\right)=4$$

となる．つまり

$$S_2\left(\frac{1}{4}\right)^2 S_2\left(\frac{1}{2}\right)^3 S_2\left(\frac{3}{4}\right)^4 S_2(1)^3 S_2\left(\frac{5}{4}\right)^2 S_2\left(\frac{3}{2}\right)=4$$

となる．これを，各項を明示することにより確かめよう．計算は同様であるので，結果を書くと，

$$\begin{aligned}
S_2\left(\frac{1}{4}\right)&=2^{\frac{3}{8}}\exp\left(-\frac{L(2)}{2\pi}\right),\\
S_2\left(\frac{1}{2}\right)&=2^{\frac{1}{2}},\\
S_2\left(\frac{3}{4}\right)&=2^{\frac{1}{8}}\exp\left(\frac{L(2)}{2\pi}\right),\\
S_2(1)&=1,\\
S_2\left(\frac{5}{4}\right)&=2^{-\frac{1}{8}}\exp\left(-\frac{L(2)}{2\pi}\right),\\
S_2\left(\frac{3}{2}\right)&=2^{-\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

となる．なお，

$$L(2)=\frac{\pi}{2}L'(-1)$$

となることを用いている．

これによって，

$$
\begin{aligned}
&S_2\left(\frac{1}{4}\right)^2 S_2\left(\frac{1}{2}\right)^3 S_2\left(\frac{3}{4}\right)^4 S_2(1)^3 S_2\left(\frac{5}{4}\right)^2 S_2\left(\frac{3}{2}\right)\\
&\quad=\left\{2^{\frac{3}{8}}\exp\left(-\frac{L(2)}{2\pi}\right)\right\}^2\times\left\{2^{\frac{1}{2}}\right\}^3\times\left\{2^{\frac{1}{8}}\exp\left(\frac{L(2)}{2\pi}\right)\right\}^4\\
&\qquad\times\{1\}^3\times\left\{2^{-\frac{1}{8}}\exp\left(-\frac{L(2)}{2\pi}\right)\right\}^2\times\left\{2^{-\frac{1}{2}}\right\}\\
&\quad=4
\end{aligned}
$$

と確かめられた．　　　　　　　　　　　　　　　　　　　[解答終]

発展問題　ディリクレ L 関数 $L(s,\chi)$ の特殊値($s\in\mathbb{Z}$；零点のときは微分係数)を多重三角関数を許容することによって求めよ．

ヒント　自然数 $r\geqq 1$ に対して $L(r,\chi)$ を求めればよい：$s=1-r$ における様子は関数等式 $L(s,\chi)\longleftrightarrow L(1-s,\overline{\chi})$ からわかる．また，χ の条件としては「原始的」(primitive)と仮定してよい．これは mod N の指標 χ に対して，$M|N, M\neq N$ となる M について mod M の指標から来ていないことを言っている．オイラー積のレベルでは，高々有限個のオイラー因子の違いを除いて，原始的指標の L 関数と一致する．さらに，χ の分類

$$
\begin{cases}
\chi\text{ が奇指標} & \chi(-1)=-1,\\
\chi\text{ が偶指標} & \chi(-1)=+1
\end{cases}
$$

に応じて

$$
r\geqq 1\text{ 奇数なら}\begin{cases}
\chi\text{ が奇指標のとき，}L(r,\chi)=\pi^r\times(\text{ベルヌイ数的代数的数}),\\
\chi\text{ が偶指標のとき，}L(r,\chi)=\pi^{r-1}\log(\text{多重三角関数}),
\end{cases}
$$

$$
r\geqq 2\text{ 偶数なら}\begin{cases}
\chi\text{ が偶指標のとき，}L(r,\chi)=\pi^r\times(\text{ベルヌイ数的代数的数}),\\
\chi\text{ が奇指標のとき，}L(r,\chi)=\pi^{r-1}\log(\text{多重三角関数})
\end{cases}
$$

となるのが結論である．

このうち，$\chi(-1)=(-1)^r$ のときは，容易な場合であり，ベルヌイ数の類似物によって $L(r,\chi)$ が表示できることが，オイラー以来，古典的に知られている：

加藤和也・黒川信重・斎藤毅『数論 I』岩波書店，2005年

を参照されたい．

以下では，$\chi(-1)=(-1)^{r+1}$ という難しい場合を考える．たとえば，定

理 5.10.1 の

$$\zeta(3)=\pi^2\log(3\text{ 重三角関数}),$$
$$L(2)=\pi\log(2\text{ 重三角関数})$$

は，それぞれ偶指標(自明指標)，奇指標(mod 4 の非自明指標)となっている．$r=1,2,3$ のときに，mod N の原始的指標 $\chi\neq\mathbb{1}$ が $\chi(-1)=(-1)^{r+1}$ をみたしている場合の $L(r,\chi)$ を具体的に書いておこう．なお，

$$\tau(\chi)=\sum_{k=1}^{N-1}\chi(k)e^{\frac{2\pi ik}{N}}$$

はガウス和である．

(1)
$$L(1,\chi)=-\frac{\tau(\chi)}{N}\log\left(\prod_{k=1}^{N-1}\mathcal{S}_1\left(\frac{k}{N}\right)^{\overline{\chi(k)}}\right)$$
$$=-\frac{\tau(\chi)}{N}\log\left(\prod_{k=1}^{N-1}S_1\left(\frac{k}{N}\right)^{\overline{\chi(k)}}\right).$$

［ディリクレの結果：1839 年］

(2)
$$L(2,\chi)=-\frac{2\pi i\tau(\chi)}{N}\log\left(\prod_{k=1}^{N-1}\left(\frac{\mathcal{S}_2\left(\frac{k}{N}\right)}{\mathcal{S}_1\left(\frac{k}{N}\right)^{\frac{k}{N}}}\right)^{\overline{\chi(k)}}\right)$$
$$=\frac{2\pi i\tau(\chi)}{N}\log\left(\prod_{k=1}^{N-1}\left(S_2\left(\frac{k}{N}\right)S_1\left(\frac{k}{N}\right)^{\frac{k}{N}}\right)^{\overline{\chi(k)}}\right).$$

(3)

$L(3,\chi)$

$$=\frac{2\pi^2\tau(\chi)}{N}\log\left(\prod_{k=1}^{N-1}\left(\frac{\mathcal{S}_3\left(\frac{k}{N}\right)\mathcal{S}_1\left(\frac{k}{N}\right)^{\frac{k^2}{N^2}}}{\mathcal{S}_2\left(\frac{k}{N}\right)^{\frac{2k}{N}}}\right)^{\overline{\chi(k)}}\right)$$

$$= \frac{2\pi^2\tau(\chi)}{N} \log\left(\prod_{k=1}^{N-1}\left(S_3\left(\frac{k}{N}\right)^2 S_2\left(\frac{k}{N}\right)^{\frac{2k}{N}-3} S_1\left(\frac{k}{N}\right)^{\left(1-\frac{k}{N}\right)^2}\right)^{\overline{\chi(k)}}\right).$$

ここでは2通りの多重三角関数で書いておいたが，相互に簡単な関係で結びついている(定理5.7.1(5)および例，定理5.8.1).

証明方法も，それに応じて，2通りある：

(a)　$\mathcal{S}_r(x)$ を用いる方法，

(b)　$S_r(x)$ を用いる方法.

方法(a)は，定理5.1.1(4)を使って得られる $0<x<1$ に対する表示

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2\pi nx)}{n} = -\log \mathcal{S}_1(x),$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2\pi nx)}{n^2} = 2\pi\log\mathcal{S}_2(x) - 2\pi x\log\mathcal{S}_1(x),$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2\pi nx)}{n^3} = 2\pi^2\log\mathcal{S}_3(x) - 4\pi^2 x\log\mathcal{S}_2(x) + 2\pi^2x^2\log\mathcal{S}_1(x) + \zeta(3)$$

などを用いる．たとえば，$r=2$ のとき奇指標 χ に対して

$$\begin{aligned} L(2,\chi) &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\chi(n)}{n^2} \\ &= -\frac{i\tau(\chi)}{N}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{N-1}\overline{\chi(k)}\sin\left(\frac{2\pi nk}{N}\right)\right)\frac{1}{n^2} \\ &= -\frac{2\pi i\tau(\chi)}{N}\sum_{k=1}^{N-1}\overline{\chi(k)}\log\left(\mathcal{S}_2\left(\frac{k}{N}\right)\mathcal{S}_1\left(\frac{k}{N}\right)^{-\frac{k}{N}}\right) \end{aligned}$$

となる.

例

$$\begin{aligned} L(2) &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\left(2\pi n\cdot\frac{1}{4}\right)}{n^2} \\ &= 2\pi\log\mathcal{S}_2\left(\frac{1}{4}\right) - 2\pi\cdot\frac{1}{4}\log\mathcal{S}_1\left(\frac{1}{4}\right) \end{aligned}$$

$$= 2\pi \log\left(\mathcal{S}_2\left(\frac{1}{4}\right)2^{-\frac{1}{8}}\right)$$
$$= 2\pi \log\left(S_2\left(\frac{1}{4}\right)^{-1}2^{\frac{3}{8}}\right).$$

方法(b)は，定理5.10.1の証明で用いたものであり，

$$\zeta(s-1,x) = \zeta_2(s,x)+(x-1)\zeta_1(s,x),$$
$$\zeta(s-2,x) = 2\zeta_3(s,x)+(2x-1)\zeta_2(s,x)+(x-1)^2\zeta_1(s,x)$$

などを準備しておくことになる．これらの証明は次の通り：

$$\begin{aligned}\zeta(s-1,x) &= \sum_{n=0}^{\infty}(n+x)(n+x)^{-s}\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}((n+1)+(x-1))(n+x)^{-s}\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+x)^{-s}+(x-1)\sum_{n=0}^{\infty}(n+x)^{-s}\\ &= \zeta_2(s,x)+(x-1)\zeta_1(s,x),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\zeta(s-2,x) &= \sum_{n=0}^{\infty}(n+x)^2(n+x)^{-s}\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\{(n+1)(n+2)+(2x-3)(n+1)+(x-1)^2\}(n+x)^{-s}\\ &= 2\zeta_3(s,x)+(2x-3)\zeta_2(s,x)+(x-1)^2\zeta_1(s,x).\end{aligned}$$

たとえば，$r=2$ のとき奇指標 χ に対して $L(2,\chi)$ を求めてみよう．そのためには，関数等式から導かれる

$$L(2,\chi) = -\frac{4\pi i\tau(\chi)}{N^2}L'(-1,\overline{\chi})$$

に注意して，$L'(-1,\overline{\chi})$ を求めることを目標に

$$\begin{aligned}L(s-1,\overline{\chi}) &= \sum_{n=1}^{\infty}\overline{\chi(n)}n^{1-s}\\ &= \sum_{k=1}^{N-1}\sum_{m=0}^{\infty}\overline{\chi(k)}(mN+k)^{1-s}\end{aligned}$$

$$= N^{1-s}\sum_{k=1}^{N-1}\overline{\chi(k)}\sum_{m=0}^{\infty}\left(m+\frac{k}{N}\right)^{1-s}$$

$$= N^{1-s}\sum_{k=1}^{N-1}\overline{\chi(k)}\zeta\left(s-1,\frac{k}{N}\right)$$

$$= N^{1-s}\sum_{k=1}^{N-1}\overline{\chi(k)}\left(\zeta_2\left(s,\frac{k}{N}\right)+\left(\frac{k}{N}-1\right)\zeta_1\left(s,\frac{k}{N}\right)\right)$$

と変形しておいて，微分すると

$$L'(-1,\overline{\chi}) = N\sum_{k=1}^{N-1}\overline{\chi(k)}\log\left(\Gamma_2\left(\frac{k}{N}\right)\Gamma_1\left(\frac{k}{N}\right)^{\frac{k}{N}-1}\right)$$

となる．ただし，$L(-1,\overline{\chi})=0$ を用いている．ここで，$\chi(N-k)=-\chi(k)$ を使って整理すると

$$L'(-1,\overline{\chi}) = \frac{N}{2}\sum_{k=1}^{N-1}\overline{\chi(k)}\log\left(\frac{\Gamma_2\left(\frac{k}{N}\right)\Gamma_1\left(\frac{k}{N}\right)^{\frac{k}{N}-1}}{\Gamma_2\left(\frac{N-k}{N}\right)\Gamma_1\left(\frac{N-k}{N}\right)^{\frac{N-k}{N}-1}}\right)$$

$$= \frac{N}{2}\sum_{k=1}^{N-1}\overline{\chi(k)}\log\left(\frac{\Gamma_2\left(\frac{k}{N}\right)}{\Gamma_2\left(2-\frac{k}{N}\right)}\cdot\Gamma_1\left(\frac{k}{N}\right)^{\frac{k}{N}}\Gamma_1\left(1-\frac{k}{N}\right)^{\frac{k}{N}}\right)$$

$$= -\frac{N}{2}\sum_{k=1}^{N-1}\overline{\chi(k)}\log\left(S_2\left(\frac{k}{n}\right)S_1\left(\frac{k}{N}\right)^{\frac{k}{N}}\right)$$

となる．よって，関数等式から

$$L(2,\chi) = \frac{2\pi i\tau(\chi)}{N}\log\left(\prod_{k=1}^{N-1}\left(S_2\left(\frac{k}{N}\right)S_1\left(\frac{k}{N}\right)^{\frac{k}{N}}\right)^{\overline{\chi(k)}}\right)$$

を得る．　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　▯

第6章
多重三角関数の発展

本章では，多重三角関数の基本的性質から導かれることを考察する．特に多重三角関数の微分が重要となる．その応用として，楕円関数やアイゼンシュタイン級数との関連を述べる．今までは扱えなかったアイゼンシュタイン級数の保型性・変換公式が多重三角関数論に組み込まれている様子を見る．また，多重三角関数の負位数版への発展を説明する．これは，第9章に現れる絶対ゼータ関数に結びついている．

さらなる応用や変形版は第Ⅲ部(第7章–第9章)において述べる．

6.1 多重三角関数の微分

本節では多重三角関数の微分について，後の準備もかねて，いくつかの定理を証明する．

定理 6.1.1 $r \geqq 2$ に対して次が成立する．

(1)

$$S_r'(0) = 2\pi \cdot \exp\left(-2 \sum_{\substack{3 \leqq l \leqq r-1 \\ l \text{ は奇数}}} \left(\sum_{k=l}^{r-1} a(k, l-1) \right) \zeta'(1-l) \right).$$

ここで，$a(k, m) \in \mathbb{Q}$ は

$$\binom{X+k-2}{k-1} = \sum_{m=1}^{k-1} a(k,m) X^m$$

の展開係数である．

(2)

$$S_r''(0) = -2\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{r-1}\right) S_r'(0).$$

□

例

$$S_2'(0) = 2\pi,$$
$$S_3'(0) = 2\pi \exp(-\zeta'(-2)),$$
$$S_4'(0) = 2\pi \exp(-2\zeta'(-2)),$$
$$S_5'(0) = 2\pi \exp\left(-\frac{1}{12}\zeta'(-4)-\frac{35}{12}\zeta'(-2)\right),$$
$$S_6'(0) = 2\pi \exp\left(-\frac{1}{4}\zeta'(-4)-\frac{15}{4}\zeta'(-2)\right).$$

$$S_2''(0) = -4\pi,$$
$$S_3''(0) = -6\pi \exp(-\zeta'(-2)),$$
$$S_4''(0) = -\frac{22\pi}{3} \exp(-2\zeta'(-2)),$$
$$S_5''(0) = -\frac{25\pi}{3} \exp\left(-\frac{1}{12}\zeta'(-4)-\frac{35}{12}\zeta'(-2)\right),$$
$$S_6''(0) = -\frac{137\pi}{15} \exp\left(-\frac{1}{4}\zeta'(-4)-\frac{15}{4}\zeta'(-2)\right).$$

□

[証明]

(1)　$S_r(x)$ の周期性（定理 5.3.1，定理 5.7.1(1)）から

$$S_r(x) = S_r(x+1) S_{r-1}(x)$$

が成立する．よって，$x=0$ における微分をとって

$$S'_r(0) = S_r(1)S'_{r-1}(0)$$

を得る．したがって

$$\begin{aligned} S'_r(0) &= S_r(1)\cdots S_2(1)S'_1(0) \\ &= 2\pi\cdot S_r(1)\cdots S_2(1) \end{aligned}$$

となる．ここで，定理 5.8.1 の証明のうち(3)の(b)の等式

$$S_k(1) = \exp\left(-2\sum_{\substack{3\leqq l\leqq k \\ l\text{ は奇数}}} a(k,l-1)\zeta'(1-l)\right)$$

を用いれば，$S'_r(0)$ の表示式を得る．

(2) $S_r(x)$ に対する微分方程式(定理 5.7.1(4)，定理 5.9.1)

$$S'_r(x) = S_r(x)(-1)^{r-1}\binom{x-1}{r-1}\pi\cot(\pi x)$$

を用いる．いま

$$S_r(x) = c_1x+c_2x^2+\cdots$$

としておくと

$$S'_r(x) = c_1+2c_2x+\cdots$$

であり

$$\begin{aligned} &S_r(x)\cdot(-1)^{r-1}\binom{x-1}{r-1}\cdot\pi\cot(\pi x) \\ &\quad= (c_1x+c_2x^2+\cdots) \\ &\qquad\times\left(1-\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{r-1}\right)x+\cdots\right)\times\left(\frac{1}{x}\cdot\frac{1-\dfrac{\pi^2}{2}x^2+\cdots}{1-\dfrac{\pi^2}{6}x^2+\cdots}\right) \\ &\quad= (c_1+c_2x+\cdots)\times\left(1-\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{r-1}\right)x+\cdots\right)\left(1-\frac{\pi^2}{3}x^2+\cdots\right) \end{aligned}$$

$$=c_1+\left(c_2-\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{r-1}\right)c_1\right)x+\cdots$$

となる．よって，微分方程式より

$$2c_2=c_2-\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{r-1}\right)c_1$$

となり

$$c_2=-\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{r-1}\right)c_1$$

を得る．ここで，

$$c_1=S_r'(0),$$
$$c_2=\frac{1}{2}S_r''(0)$$

であるから

$$S_r''(0)=-2\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{r-1}\right)S_r'(0)$$

となる．　[証明終]

定理 6.1.2　$r\geqq 2$ のとき次が成立する．

$$S_r'(0,(\omega_1,\cdots,\omega_r))=S_{r-1}'(0,(\omega_1,\cdots,\omega_{r-1}))S_r(\omega_r,(\omega_1,\cdots,\omega_r)).$$ ▯

［証明］　$S_r(x,(\omega_1,\cdots,\omega_r))$ の周期性（定理 5.3.1）より

$$S_r(x,(\omega_1,\cdots,\omega_r))=S_r(x+\omega_r,(\omega_1,\cdots,\omega_r))S_{r-1}(x,(\omega_1,\cdots,\omega_{r-1}))$$

となるので，$x=0$ において微分すればよい．　[証明終]

定理 6.1.3

(1)　$S_2'(0,(\omega_1,\omega_2))=\dfrac{2\pi}{\sqrt{\omega_1\omega_2}}$.

(2)　$S_2(\omega_1,(\omega_1,\omega_2))=\sqrt{\dfrac{\omega_2}{\omega_1}}$.

(3)　$S_2(\omega_2,(\omega_1,\omega_2))=\sqrt{\dfrac{\omega_1}{\omega_2}}$. ▯

［証明］

(1)　定理 6.1.2 より

$$S_2'(0,(\omega_1,\omega_2)) = S_1'(0,\omega_1)S_2(\omega_2,(\omega_1,\omega_2))$$

であるが，

$$S_1(x,\omega_1) = 2\sin\left(\frac{\pi x}{\omega_1}\right)$$

より

$$S_1'(0,\omega_1) = \frac{2\pi}{\omega_1}$$

となるので，

$$S_2'(0,(\omega_1,\omega_2)) = \frac{2\pi}{\omega_1}S_2(\omega_2,(\omega_1,\omega_2))$$

を得る．よって，(3) が示されれば

$$\begin{aligned} S_2'(0,(\omega_1,\omega_2)) &= \frac{2\pi}{\omega_1}\sqrt{\frac{\omega_1}{\omega_2}} \\ &= \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_1\omega_2}} \end{aligned}$$

とわかる．

(2) (3)　対称性から，どちらを示しても同じことであるので，(3) を示そう．2 重ガンマ関数を用いると

$$\begin{aligned} S_2(\omega_2,(\omega_1,\omega_2)) &= \frac{\Gamma_2(\omega_1,(\omega_1,\omega_2))}{\Gamma_2(\omega_2,(\omega_1,\omega_2))} \\ &= \lim_{x\to 0}\frac{\Gamma_2(x+\omega_1,(\omega_1,\omega_2))}{\Gamma_2(x+\omega_2,(\omega_1,\omega_2))} \end{aligned}$$

となる．ここで，定理 3.5.1 の周期性より

$$\Gamma_2(x+\omega_1,(\omega_1,\omega_2)) = \Gamma_2(x,(\omega_1,\omega_2))\Gamma_1(x,\omega_2)^{-1},$$

$$\Gamma_2(x+\omega_2,(\omega_1,\omega_2)) = \Gamma_2(x,(\omega_1,\omega_2))\Gamma_1(x,\omega_1)^{-1}$$

であるから

$$\begin{aligned}\frac{\Gamma_2(x+\omega_1,(\omega_1,\omega_2))}{\Gamma_2(x+\omega_2,(\omega_1,\omega_2))} &= \frac{\Gamma_1(x,\omega_1)}{\Gamma_1(x,\omega_2)} \\ &= \frac{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\Gamma\left(\frac{x}{\omega_1}\right)\omega_1^{\frac{x}{\omega_1}-\frac{1}{2}}}{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\Gamma\left(\frac{x}{\omega_2}\right)\omega_2^{\frac{x}{\omega_2}-\frac{1}{2}}} \\ &= \frac{\frac{x}{\omega_1}\Gamma\left(\frac{x}{\omega_1}\right)\omega_1^{\frac{x}{\omega_1}+\frac{1}{2}}}{\frac{x}{\omega_2}\Gamma\left(\frac{x}{\omega_2}\right)\omega_2^{\frac{x}{\omega_2}+\frac{1}{2}}} \\ &= \frac{\Gamma\left(\frac{x}{\omega_1}+1\right)\omega_1^{\frac{x}{\omega_1}+\frac{1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{x}{\omega_2}+1\right)\omega_2^{\frac{x}{\omega_2}+\frac{1}{2}}}\end{aligned}$$

となるので

$$\begin{aligned}S_2(\omega_2,(\omega_1,\omega_2)) &= \lim_{x\to 0}\frac{\Gamma\left(\frac{x}{\omega_1}+1\right)\omega_1^{\frac{x}{\omega_1}+\frac{1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{x}{\omega_2}+1\right)\omega_2^{\frac{x}{\omega_2}+\frac{1}{2}}} \\ &= \sqrt{\frac{\omega_1}{\omega_2}}\end{aligned}$$

がわかる.　[証明終]

6.2　多重三角関数とアイゼンシュタイン級数

2重三角関数論と楕円関数論との関連として次の新谷卓郎の定理(1977年)は基本的である.

定理 6.2.1　$\mathrm{Im}(\tau)>0$ に対して次が成立する.

$$S_2(x,(1,\tau)) = \frac{\prod_{n=0}^{\infty}(1-e^{2\pi ix}e^{2\pi in\tau})}{\prod_{n=1}^{\infty}(1-e^{\frac{2\pi ix}{\tau}}e^{-\frac{2\pi in}{\tau}})} \times \exp\left(\frac{\pi i}{2}\left(\frac{x^2}{\tau}-\left(1+\frac{1}{\tau}\right)x+\frac{1}{6}\left(\tau+3+\frac{1}{\tau}\right)\right)\right). \qquad \square$$

[証明] 定理の右辺を $F(x)$ とおく．簡単な計算により

$$F(x+1) = F(x)S_1(x,\tau)^{-1} = F(x)\left(2\sin\left(\frac{\pi x}{\tau}\right)\right)^{-1},$$

$$F(x+\tau) = F(x)S_1(x,1)^{-1} = F(x)\left(2\sin\pi x\right)^{-1}$$

がわかる．これは，$S_2(x,(1,\tau))$ の変換公式(周期性：定理 5.3.1)と同じである．したがって

$$H(x) = \frac{S_2(x,(1,\tau))}{F(x)}$$

は

$$\begin{cases} H(x+1) = H(x), \\ H(x+\tau) = H(x) \end{cases}$$

という 2 重周期関数(楕円関数)である．さらに，$S_2(x,(1,\tau))$ および $F(x)$ の零点と極はすべて 1 位であり，

$$\begin{cases} \text{零点は，} x = -(n_1\omega_1+n_2\omega_2) & n_1, n_2 = 0, 1, 2, \cdots \\ \text{極は，} x = n_1\omega_1+n_2\omega_2 & n_1, n_2 = 1, 2, 3\cdots \end{cases}$$

にあって，一致していることがわかる．したがって，$H(x)$ は定数関数となる．定数を求めるには

$$H(0) = \frac{S_2'(0,(1,\tau))}{F'(0)}$$

を計算すればよい．まず，定理 6.1.3(1) より

$$S_2'(0,(1,\tau)) = \frac{2\pi}{\sqrt{\tau}}$$

である．次に，

$$F'(0) = -2\pi i \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1-e^{2\pi i n\tau}}{1-e^{-\frac{2\pi i n}{\tau}}} \times \exp\left(\frac{\pi i}{12}\left(\tau+3+\frac{1}{\tau}\right)\right)$$

はデデキント η 関数

$$\eta(\tau) = e^{\frac{\pi i \tau}{12}} \prod_{n=1}^{\infty} (1-e^{2\pi i n\tau})$$

を用いて

$$F'(0) = -2\pi i \frac{e^{-\frac{\pi i \tau}{12}}\eta(\tau)}{e^{\frac{\pi i}{12\tau}}\eta\left(-\frac{1}{\tau}\right)} \times \exp\left(\frac{\pi i}{12}\left(\tau+3+\frac{1}{\tau}\right)\right)$$

と表示される．ここで，デデキント η 関数の変換公式(保型性)

$$\eta\left(-\frac{1}{\tau}\right) = \sqrt{\frac{\tau}{i}}\eta(\tau)$$

を用いると

$$F'(0) = \frac{2\pi}{\sqrt{\tau}}$$

となる．したがって，$H(0)=1$．よって，等式

$$S_2(x,(1,\tau)) = F(x)$$

が証明された．　　　　　　　　　　　　　　　　　[証明終]

アイゼンシュタイン級数を導入しよう．上半平面の変数 τ $(\mathrm{Im}(\tau)>0)$ に対して“重さ k のアイゼンシュタイン級数” $E_k(\tau)$ を

$$E_k(\tau) = \frac{\zeta(1-k)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{k-1}(n) e^{2\pi i n\tau}$$

と定義する．ここで，k は0以外の複素数とし，

$$\sigma_{k-1}(n) = \sum_{d|n} d^{k-1}$$

である．よく知られているように，k が4以上の偶数のとき $E_k(\tau)$ はモジュラー群 $SL_2(\mathbb{Z})$ に対する保型形式になっている．とくに，変換公式

$$E_k\left(-\frac{1}{\tau}\right) = \tau^k E_k(\tau)$$

をみたす．

ラマヌジャンは，等式

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5}{e^{2\pi n}-1} = \frac{1}{504}$$

を発見したが，それは

$$E_6(\tau) = -\frac{1}{504} + \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_5(n) e^{2\pi i n \tau}$$

に対する変換公式から証明することができる：

変換公式

$$E_6\left(-\frac{1}{\tau}\right) = \tau^6 E_6(\tau)$$

において $\tau = i$ とすると

$$E_6(i) = -E_6(i)$$

となり，$E_6(i)=0$ がわかるが，これは

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sigma_5(n) e^{-2\pi n} = \frac{1}{504}$$

を言っているのであり，さらに，

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_5(n) e^{-2\pi n} &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m|n} m^5 e^{-2\pi n} \\ &= \sum_{m,n \geqq 1} m^5 e^{-2\pi mn} \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m^5}{e^{2\pi m}-1} \end{aligned}$$

である．詳しくは，次の本の第 9 章を参照されたい：

黒川信重・栗原将人・斎藤毅『数論 II』岩波書店，2005 年．

また，$k=2$ のときの

$$E_2(\tau) = -\frac{1}{24} + \sum_{n=1}^{\infty} \sigma(n) e^{2\pi i n \tau}$$

に対して（$\sigma_1(n)$ を通常 $\sigma(n)$ と書く）は，変換公式

$$E_2\left(-\frac{1}{\tau}\right) = \tau^2 E_2(\tau) - \frac{\tau}{4\pi i}$$

が知られているので，$\tau=i$ として

$$E_2(i) = -E_2(i) - \frac{1}{4\pi}$$

より

$$E_2(i) = -\frac{1}{8\pi}$$

を得る．これから，等式

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{e^{2\pi n}-1} = \frac{1}{24} - \frac{1}{8\pi}$$

が得られる．

正の偶数以外の k に対しては，$E_k(\tau)$ の保型性を示す量

$$E_k\left(-\frac{1}{\tau}\right) - \tau^k E_k(\tau)$$

を求めることはなされていない．ここでは，2重三角関数を用いて考察する．まず，重さ1の

$$E_1(\tau) = -\frac{1}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} d(n) e^{2\pi i n\tau}$$

の場合($\sigma_0(n)$ を通常 $d(n)$ と書く)を調べる．

今後の便利のため，多重余接(コタンジェント)関数 $\mathrm{Cot}_r(x, (\omega_1, \cdots, \omega_r))$ を

$$\mathrm{Cot}_r(x, (\omega_1, \cdots, \omega_r)) = \frac{S_r'(x, (\omega_1, \cdots, \omega_r))}{S_r(x, (\omega_1, \cdots, \omega_r))}$$

と定義しておく．

次が基本的な定理である．

定理 6.2.2　$\mathrm{Im}(\tau)>0$ に対して次が成立する．

(1)　$\mathrm{Cot}_2(\tau, (1, \tau)) = \dfrac{2\pi i}{\tau}\left(E_1\left(-\dfrac{1}{\tau}\right) - \tau E_1(\tau)\right)$.

(2)　$S_2'(\tau, (1, \tau)) = \dfrac{2\pi i}{\tau^{3/2}}\left(E_1\left(-\dfrac{1}{\tau}\right) - \tau E_1(\tau)\right)$.

(3) $S_2''(0,(1,\tau))=\dfrac{8\pi^2 i}{\tau^{3/2}}\left(E_1\left(-\dfrac{1}{\tau}\right)-\tau E_1(\tau)\right).$ ▯

[証明]

(1) 定理 6.2.1 の両辺の対数微分をとると

$$\begin{aligned}\mathrm{Cot}_2(x,(1,\tau)) &= -2\pi i\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}e^{2\pi i n m\tau}e^{2\pi i m x}\\&\quad+\frac{2\pi i}{\tau}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}e^{-\frac{2\pi i n m}{\tau}}e^{\frac{2\pi i m x}{\tau}}\\&\quad+\frac{\pi i}{2}\left(\frac{2x}{\tau}-\left(1+\frac{1}{\tau}\right)\right)\end{aligned}$$

となるため,

$$\begin{aligned}\mathrm{Cot}_2(\tau,(1,\tau)) &= -2\pi i\left(E_1(\tau)+\frac{1}{4}\right)\\&\quad+\frac{2\pi i}{\tau}\left(E_1\left(-\frac{1}{\tau}\right)+\frac{1}{4}\right)\\&\quad+\frac{\pi i}{2}\left(1-\frac{1}{\tau}\right)\\&=\frac{2\pi i}{\tau}\left(E_1\left(-\frac{1}{\tau}\right)-\tau E_1(\tau)\right)\end{aligned}$$

となる.

(2) 定理 6.1.3(3) より

$$S_2(\tau,(1,\tau))=\frac{1}{\sqrt{\tau}}$$

であるので, 等式

$$\mathrm{Cot}_2(\tau,(1,\tau))=\frac{S_2'(\tau,(1,\tau))}{S_2(\tau,(1,\tau))}$$

より

$$\begin{aligned}S_2'(\tau,(1,\tau)) &= \mathrm{Cot}_2(\tau,(1,\tau))S_2(\tau,(1,\tau))\\&=\mathrm{Cot}_2(\tau,(1,\tau))\frac{1}{\sqrt{\tau}}\end{aligned}$$

となり, (1)を用いれば(2)を得る.

(3)　$S_2(x,(1,\tau))$ の周期性(定理 5.3.1)より

$$S_2(x,(1,\tau)) = S_2(x+\tau,(1,\tau))S_1(x)$$

となるので，x について 2 回微分して $x=0$ とすると

$$\begin{aligned} S_2''(0,(1,\tau)) &= 2S_2''(\tau,(1,\tau))S_1'(0) \\ &= 4\pi S_2'(\tau,(1,\tau)) \end{aligned}$$

となる．よって，(2)を用いれば(3)を得る．　[証明終]

注意　$E_1(\tau)$ を

$$E_1(\tau) = -\frac{1}{4}+\sum_{m,n\geqq 1} e^{2\pi imn\tau}$$

と表示すると，2 次形式 $Q(x,y)=xy$ に対する変形テータ級数

$$E_1(\tau) = -\frac{1}{4}+\sum_{m,n\geqq 1} e^{2\pi iQ(m,n)\tau}$$

が表れていることがわかる．

6.3　周期の変換

自然数 $M,N\geqq 1$ に対して，周期 (M,N) の 2 重三角関数を周期$(1,1)$の場合へと変換できることを示そう．

定理 6.3.1　自然数 $M,N\geqq 1$ に対して次が成立する．

(1)　$S_2(x,(M,N))=\displaystyle\prod_{\substack{k=0,\cdots,N-1\\ l=0,\cdots,M-1}} S_2\left(\frac{x}{MN}+\frac{k}{N}+\frac{l}{M}\right)$.

(2)　$\mathrm{Cot}_2(x,(M,N))=\displaystyle\frac{1}{MN}\sum_{\substack{k=0,\cdots,N-1\\ l=0,\cdots,M-1}} \mathrm{Cot}_2\left(\frac{x}{MN}+\frac{k}{N}+\frac{l}{M}\right)$.　□

[証明]　(1) まず

$$\xi_2(s,x,(M,N)) = (MN)^{-s}\sum_{k,l}\xi_2\left(s,\frac{x}{MN}+\frac{k}{N}+\frac{l}{M}\right)$$

となることを示そう．そのために，

$$\zeta_2(s,x,(M,N)) = \sum_{n_1,n_2\geqq 0}(n_1M+n_2N+x)^{-s}$$

を変形することからはじめる．ここで，

$$\begin{cases} n_1 = m_1N+k \\ n_2 = m_2M+l \end{cases} \qquad \left(\begin{array}{l} m_1, m_2 \geqq 0 \\ k=0,\cdots,N-1\,;\ l=0,\cdots,M-1 \end{array}\right)$$

とおきかえると

$$\begin{aligned}\zeta_2(s,x,(M,N)) &= \sum_{\substack{m_1,m_2\geqq 0\\ k,l}}((m_1+m_2)MN+kM+lN+x)^{-s} \\ &= (MN)^{-s}\sum_{k,l}\zeta_2\left(s,\frac{x}{MN}+\frac{k}{N}+\frac{l}{M}\right)\end{aligned}$$

となる．また，このことから

$$\zeta_2(s,M+N-x,(M,N)) = (MN)^{-s}\sum_{k',l'}\zeta_2\left(s,\frac{M+N-x}{MN}+\frac{k'}{N}+\frac{l'}{M}\right)$$

となる．ここで，$k'=0,\cdots,N-1$ および $l'=0,\cdots,M-1$．いま，

$$\begin{cases} k' = N-1-k, \\ l' = M-1-l \end{cases}$$

とおきかえると，

$$\zeta_2(s,M+N-x,(M,N)) = (MN)^{-s}\sum_{k,l}\zeta_2\left(s,2-\left(\frac{x}{MN}+\frac{k}{N}+\frac{l}{M}\right)\right)$$

となることがわかる．したがって，

$$\begin{aligned}\xi_2(s,x,(M,N)) &= -\zeta_2(s,x,(M,N))+\zeta_2(s,M+N-x,(M,N)) \\ &= (MN)^{-s}\sum_{k,l}\left\{-\zeta_2\left(s,\frac{x}{MN}+\frac{k}{N}+\frac{l}{M}\right)\right. \\ &\qquad \left.+\zeta_2\left(s,2-\left(\frac{x}{MN}+\frac{k}{N}+\frac{l}{M}\right)\right)\right\}\end{aligned}$$

$$= (MN)^{-s} \sum_{k,l} \xi_2 \left(s, \frac{x}{MN} + \frac{k}{N} + \frac{l}{M}\right)$$

を得る．

ここで，消滅定理(定理 5.2.1) $\xi_r(0, x, \boldsymbol{\omega})=0$ に注意すると

$$\xi_2'(0, x, (M, N)) = \sum_{k,l} \xi_2' \left(0, \frac{x}{MN} + \frac{k}{N} + \frac{l}{M}\right)$$

となる．よって，指数関数をとり

$$S_2(x, (M, N)) = \prod_{k,l} S_2 \left(\frac{x}{MN} + \frac{k}{N} + \frac{l}{M}\right)$$

となる．

(2)　(1)の対数微分をとると

$$\mathrm{Cot}_2(x, (M, N)) = \frac{1}{MN} \sum_{k,l} \mathrm{Cot}_2 \left(\frac{x}{MN} + \frac{k}{N} + \frac{l}{M}\right)$$

とわかる．　[証明終]

ここで，多重余接関数の斉次性に注意しておこう．

定理 6.3.2　$c>0$ に対して

$$\mathrm{Cot}_r(cx, c\boldsymbol{\omega}) = \frac{1}{c} \mathrm{Cot}_r(x, \boldsymbol{\omega}).$$

▯

[証明]　$S_r(x, \boldsymbol{\omega})$ の斉次性(定理 5.6.1)

$$S_r(cx, c\boldsymbol{\omega}) = S_r(x, \boldsymbol{\omega})$$

の対数微分をとればよい．　[証明終]

この斉次性を用いると，先の変換公式は次の形にもなる．

定理 6.3.3　自然数 $M, N \geqq 1$ に対して

$$\mathrm{Cot}_2 \left(x, \left(\frac{1}{M}, \frac{1}{N}\right)\right) = \sum_{\substack{k=0,\cdots,N-1 \\ l=0,\cdots,M-1}} \mathrm{Cot}_2 \left(x + \frac{k}{N} + \frac{l}{M}\right).$$

▯

［証明］　定理 6.3.1(2) において，x を MNx でおきかえると

$$\mathrm{Cot}_2(MNx,(M,N))=\frac{1}{MN}\sum_{k,l}\mathrm{Cot}_2\left(x+\frac{k}{N}+\frac{l}{M}\right)$$

となる．ここで，定理 6.3.2 を $c=MN$ として用いると

$$\begin{aligned}\mathrm{Cot}_2(MNx,(M,N))&=\mathrm{Cot}_2\left(MNx,MN\left(\frac{1}{N},\frac{1}{M}\right)\right)\\&=\frac{1}{MN}\mathrm{Cot}_2\left(x,\left(\frac{1}{M},\frac{1}{N}\right)\right)\end{aligned}$$

となるので，$1/MN$ が消去されて，定理を得る．　［証明終］

発展問題　自然数 $N_1,\cdots,N_r\geqq 1$ に対して

$$S_r(x,(N_1,\cdots,N_r)) \text{ および } \mathrm{Cot}_r(x,(N_1,\cdots,N_r))$$

と周期 $(1,\cdots,1)$ の場合との関連を調べよ．

ヒント　定理 6.3.1 の証明を一般化せよ．

6.4　2重余接関数の特殊値

本節では，2重余接関数の特殊値に関する基本定理を証明する．

定理 6.4.1　互いに素な自然数 $M,N\geqq 1$ に対して，次が成立する．

$$\begin{aligned}\mathrm{Cot}_2(M,(M,N))&=\mathrm{Cot}_2(N,(M,N))\\&=-\frac{\pi}{MN}\sum_{\substack{m=0,\cdots,M-1\\ n=0,\cdots,N-1\\ (m,n)\neq(0,0)}}\left|\frac{m}{M}-\frac{n}{N}\right|\cot\left(\pi\left|\frac{m}{M}-\frac{n}{N}\right|\right)\\&\quad-\frac{1}{MN}.\end{aligned}$$

□

［証明］　定理 6.3.1(2) から

$$\mathrm{Cot}_2(M,(M,N))=\frac{1}{MN}\sum_{\substack{k=0,\cdots,N-1\\ l=0,\cdots,M-1}}\mathrm{Cot}_2\left(\frac{1}{N}+\frac{k}{N}+\frac{l}{M}\right)$$

である．ただし，定理 5.9.1 から

$$\mathrm{Cot}_2(x) = \pi(1-x)\cot(\pi x)$$

であり，上記の和において $(k,l)=(N-1,0)$ の項は注意が必要となり

$$\begin{aligned}\mathrm{Cot}_2(1) &= \lim_{x\to 1}\mathrm{Cot}_2(x)\\ &= \lim_{x\to 1}\pi(1-x)\cot(\pi x)\\ &= \lim_{x\to 1}\frac{\pi(1-x)\cos(\pi x)}{\sin(\pi x)}\\ &= -1\end{aligned}$$

と解釈する．なお，定理 6.2.2 の証明の議論と $S_2(1)=1$ を使うと

$$\mathrm{Cot}_2(1) = S_2'(1) = \frac{S_2''(0)}{4\pi}$$

であり，定理 6.1.1 と例より $S_2''(0)=-4\pi$ に注意すると

$$\mathrm{Cot}_2(1) = -1 \iff S_2'(1) = -1 \iff S_2''(0) = -4\pi$$

であって，どれも成立している．

このようにして，

$$\begin{aligned}&\mathrm{Cot}_2(M,(M,N))\\ &= \frac{\pi}{MN}\sum_{(k,l)\neq(0,0)}\left(\frac{N-k-1}{N}-\frac{l}{M}\right)\pi\cot\left(\pi\left(\frac{k+1}{N}+\frac{l}{M}\right)\right)-\frac{1}{MN}\end{aligned}$$

となる．ここで，$(m,n)=(l,N-k-1)$ とおきかえると

$$\begin{aligned}&\mathrm{Cot}_2(M,(M,N))\\ &\qquad = -\frac{\pi}{MN}\sum_{\substack{m=0,\cdots,M-1\\ n=0,\cdots,N-1\\ (m,n)\neq(0,0)}}\left|\frac{m}{M}-\frac{n}{N}\right|\cot\left(\pi\left|\frac{m}{M}-\frac{n}{N}\right|\right)-\frac{1}{MN}\end{aligned}$$

を得る．

なお，等式

$$\mathrm{Cot}_2(N,(M,N)) = \mathrm{Cot}_2(M,(M,N))$$

は等式

$$\mathrm{Cot}_2(x,(\omega_1,\omega_2))=\mathrm{Cot}_2(\omega_1+\omega_2-x,(\omega_1,\omega_2))$$

の特別の場合である．後者は

$$S_2(x,(\omega_1,\omega_2))=S_2(\omega_1+\omega_2-x,(\omega_1,\omega_2))^{-1}$$

を対数微分すると得られる．［証明終］

6.5　尖点特殊値

自然数 $M,N\geqq1$ に対して，有理数 M/N はモジュラー群 $SL_2(\mathbb{Z})$ の尖点(カスプ)と呼ばれる．アイゼンシュタイン級数自体は尖点においては定義されていないが，次のように保型性を測る極限値は求めることができる．

定理 6.5.1　互いに素な自然数 $M,N\geqq1$ に対して次が成り立つ．

$$\begin{aligned}&\lim_{\substack{\tau\to M/N\\ \mathrm{Im}(\tau)>0}}\left(E_1\left(-\frac{1}{\tau}\right)-\tau E_1(\tau)\right)\\&=\frac{i}{2N}\sum_{\substack{m=0,\cdots,M-1\\ n=0,\cdots,N-1\\ (m,n)\neq(0,0)}}\left|\frac{m}{M}-\frac{n}{N}\right|\cot\left(\pi\left|\frac{m}{M}-\frac{n}{N}\right|\right)+\frac{i}{2\pi N}.\end{aligned}$$

□

［証明］　定理 6.2.2(1) より $\mathrm{Im}(\tau)>0$ に対して

$$E_1\left(-\frac{1}{\tau}\right)-\tau E_1(\tau)=\frac{\tau}{2\pi i}\mathrm{Cot}_2(\tau,(1,\tau))$$

である．この右辺の関数は，$\tau\in\mathbb{C}-(-\infty,0]$ において連続関数として延長されている．とくに，

$$\lim_{\substack{\tau\to M/N\\ \mathrm{Im}(\tau)>0}}\left(E_1\left(-\frac{1}{\tau}\right)-\tau E_1(\tau)\right)=\frac{M/N}{2\pi i}\mathrm{Cot}_2\left(\frac{M}{N},\left(1,\frac{M}{N}\right)\right)$$

が成立する．ここで，定理 6.3.2 より

$$\mathrm{Cot}_2\left(\frac{M}{N},\left(1,\frac{M}{N}\right)\right)=\mathrm{Cot}_2\left(\frac{1}{N}\cdot M,\frac{1}{N}(N,M)\right)$$
$$=N\cdot\mathrm{Cot}_2(M,(M,N))$$

である．したがって，

$$\lim_{\substack{\tau\to M/N\\ \mathrm{Im}(\tau)>0}}\left(E_1\left(-\frac{1}{\tau}\right)-\tau E_1(\tau)\right)=\frac{M}{2\pi i}\,\mathrm{Cot}_2(M,(M,N))$$

となる．よって，定理 6.4.1 から

$$\lim_{\substack{\tau\to M/N\\ \mathrm{Im}(\tau)>0}}\left(E_1\left(-\frac{1}{\tau}\right)-\tau E_1(\tau)\right)=\frac{i}{2N}\sum_{m,n}\left|\frac{m}{M}-\frac{n}{N}\right|\cot\left(\pi\left|\frac{m}{M}-\frac{n}{N}\right|\right)+\frac{i}{2\pi N}$$

がわかる．　　[証明終]

例　次の(0)(1)(2)(3)が成立する．これらは，定理 6.2.2 より同値である．

(0)　$\displaystyle\lim_{\substack{\tau\to 1\\ \mathrm{Im}(\tau)>0}}\left(E_1\left(-\frac{1}{\tau}\right)-\tau E_1(\tau)\right)=\frac{i}{2\pi}.$

(1)　$\mathrm{Cot}_2(1)=-1.$

(2)　$S_2'(1)=-1.$

(3)　$S_2''(0)=-4\pi.$　　▯

6.6　高階微分

本節では，2 重余接関数の高階微分を調べ，その応用として，重さ k のアイゼンシュタイン級数の保型性と尖点特殊値を考察する．

定理 6.6.1　自然数 $k\geqq 1$ と，$\mathrm{Im}(\tau)>0$ に対して次が成立する．

$$\mathrm{Cot}_2^{(k-1)}(\tau,(1,\tau)) = \begin{cases} \left(\dfrac{2\pi i}{\tau}\right)^k \left(E_k\left(-\dfrac{1}{\tau}\right)-\tau^k E_k(\tau)\right) & k \text{ は奇数}, \\ \dfrac{\zeta(1-k)}{2}(2\pi i)^k \left(1-\dfrac{1}{\tau^k}\right) & k \text{ は偶数}. \end{cases}$$

□

［証明］ $k=1$ のときは，既に証明済の定理 6.2.2 であるので，以下では $k \geqq 2$ としよう．$k=1$ のときの証明で用いた公式

$$\mathrm{Cot}_2(x,(1,\tau)) = -2\pi i \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{2\pi imx}}{1-e^{2\pi im\tau}} + \frac{2\pi i}{\tau} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{\frac{2\pi imx}{\tau}}}{e^{\frac{2\pi im}{\tau}}-1} + \frac{\pi i}{\tau}x - \frac{\pi i}{2}\left(1+\frac{1}{\tau}\right)$$

から出発する．ただし，$0 \leqq \mathrm{Im}(x) \leqq \mathrm{Im}(\tau)$ としておく．

これを x について微分すると

$$\mathrm{Cot}_2'(x,(1,\tau)) = -(2\pi i)^2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{me^{2\pi imx}}{1-e^{2\pi im\tau}} + \left(\frac{2\pi i}{\tau}\right)^2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{me^{\frac{2\pi imx}{\tau}}}{e^{\frac{2\pi im}{\tau}}-1} + \frac{\pi i}{\tau}$$

となるので，$x=\tau$ として

$$\begin{aligned}\mathrm{Cot}_2'(\tau,(1,\tau)) &= -(2\pi i)^2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{me^{2\pi im\tau}}{1-e^{2\pi im\tau}} + \left(\frac{2\pi i}{\tau}\right)^2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m}{e^{\frac{2\pi im}{\tau}}-1} + \frac{\pi i}{\tau} \\ &= \left(\frac{2\pi i}{\tau}\right)^2 \left(E_2\left(-\frac{1}{\tau}\right)-\tau^2 E_2(\tau)\right) + \frac{\pi^2}{6}\left(1-\frac{1}{\tau^2}\right) + \frac{\pi i}{\tau}\end{aligned}$$

となる．ここで，

$$E_2\left(-\frac{1}{\tau}\right)-\tau^2 E_2(\tau) = -\frac{\tau}{4\pi i}$$

を用いると

$$\mathrm{Cot}_2'(\tau,(1,\tau)) = \frac{\pi^2}{6}\left(1-\frac{1}{\tau^2}\right)$$

を得る．これが定理の $k=2$ の場合である．

次に，$k \geqq 3$ の場合は

$$\mathrm{Cot}_2^{(k-1)}(x,(1,\tau)) = -(2\pi i)^k \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m^{k-1}e^{2\pi imx}}{1-e^{2\pi im\tau}} + \left(\frac{2\pi i}{\tau}\right)^k \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m^{k-1}e^{\frac{2\pi imx}{\tau}}}{e^{\frac{2\pi im}{\tau}}-1}$$

より

$$\mathrm{Cot}_2^{(k-1)}(\tau,(1,\tau)) = \left(\frac{2\pi i}{\tau}\right)^k \left(E_k\left(-\frac{1}{\tau}\right)-\tau^k E_k(\tau)\right) + \frac{\zeta(1-k)}{2}(2\pi i)^k\left(1-\frac{1}{\tau^k}\right)$$

となる．ここで，$k \geqq 3$ が奇数のときは，$\zeta(1-k)=0$ なので

$$\mathrm{Cot}_2^{(k-1)}(\tau,(1,\tau)) = \left(\frac{2\pi i}{\tau}\right)^k \left(E_k\left(-\frac{1}{\tau}\right)-\tau^k E_k(\tau)\right)$$

となり，$k \geqq 4$ が偶数のときは

$$E_k\left(-\frac{1}{\tau}\right) = \tau^k E_k(\tau)$$

なので

$$\mathrm{Cot}_2^{(k-1)}(\tau,(1,\tau)) = \frac{\zeta(1-k)}{2}(2\pi i)^k\left(1-\frac{1}{\tau^k}\right)$$

となって定理を得る．　［証明終］

定理 6.6.2　自然数 $k \geqq 1$ に対して

$$\lim_{\substack{\tau\to 1\\ \mathrm{Im}(\tau)>0}} \left(E_k\left(-\frac{1}{\tau}\right)-\tau^k E_k(\tau)\right) = \frac{(-1)^k B_{k-1}}{2\pi i}$$

が成り立つ．ただし，B_k はベルヌイ数．　▯

［証明］ k が偶数のときは簡単であるので，k が奇数のときを示す．このときは，定理 6.6.1 から

$$\lim_{\substack{\tau\to 1\\ \mathrm{Im}(\tau)>0}} \left(E_k\left(-\frac{1}{\tau}\right)-\tau^k E_k(\tau)\right) = \frac{1}{(2\pi i)^k}\,\mathrm{Cot}_2^{(k-1)}(1)$$

となる．ここで，

$$\begin{aligned}\mathrm{Cot}_2(x) &= \mathrm{Cot}_2(x,(1,1))\\ &= -\pi(x-1)\cot(\pi x)\end{aligned}$$

だから

$$\begin{aligned}\mathrm{Cot}_2(1+x) &= -\pi x\cot(\pi x)\\ &= -\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m(2\pi)^{2m}B_{2m}}{(2m)!}x^{2m}\end{aligned}$$

となる．ただし，ベルヌイ数の定義と同値なテイラー展開

$$x\cot x = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m 2^{2m}B_{2m}}{(2m)!}x^{2m}$$

を用いた．したがって，$k=1+2m$ と書くと

$$\begin{aligned}\mathrm{Cot}_2^{(k-1)}(1) &= \mathrm{Cot}_2^{(2m)}(1)\\ &= -(-1)^m(2\pi)^{2m}B_{2m}\\ &= -(-1)^{\frac{k-1}{2}}(2\pi)^{k-1}B_{k-1}\end{aligned}$$

となり

$$\lim_{\substack{\tau\to 1\\ \mathrm{Im}(\tau)>0}} \left(E_k\left(-\frac{1}{\tau}\right)-\tau^k E_k(\tau)\right) = \frac{(-1)^k B_{k-1}}{2\pi i}$$

を得る． ［証明終］

例

$$B_0=1,\quad B_1=-\frac{1}{2},\quad B_2=\frac{1}{6},\quad B_3=0,\quad B_4=-\frac{1}{30}$$

であるから，$k=1,2,3,4,5$ に対する定理 6.6.2 の右辺の値は

$$\frac{i}{2\pi},\quad \frac{i}{4\pi},\quad \frac{i}{12\pi},\quad 0,\quad -\frac{i}{60\pi}$$

となる. ▯

本節の結果については，次の論文も参照されたい：

N. Kurokawa, "Limit values of Eisenstein series and multiple cotangent functions", *J. Number Theory*, **128** (2008), 1775–1783.

注意　$k\geqq 3$ のとき偶奇によらずに

$$\lim_{\substack{\tau\to 1\\ \mathrm{Im}(\tau)>0}}\left(E_k\left(-\frac{1}{\tau}\right)-\tau^k E_k(\tau)\right)=\frac{1}{(2\pi i)^k}\,\mathrm{Cot}_2^{(k-1)}(1)$$

となることは，定理 6.6.1 の証明の途中で得られた表示

$$\mathrm{Cot}_2^{(k-1)}(\tau,(1,\tau))=\left(\frac{2\pi i}{\tau}\right)^k\left(E_k\left(-\frac{1}{\tau}\right)-\tau^k E_k(\tau)\right)+\frac{\zeta(1-k)}{2}(2\pi i)^k\left(1-\frac{1}{\tau^k}\right)$$

において $\tau\to 1$ の極限を見ればわかる.

6.7　加法公式

多重三角関数の加法公式とは

$$S_r(x+y,\boldsymbol{\omega})=\Phi_{\boldsymbol{\omega}}(S_r(x,\boldsymbol{\omega}),S_r(y,\boldsymbol{\omega}))$$

となる $\Phi_{\boldsymbol{\omega}}(X,Y)$ を求めることである. この問題は N 分値の代数性を見るために重要なものであるが，一般に難しい問題である.

ここでは，x,y が 0 の近傍のときに得られる

$$\Phi_{\boldsymbol{\omega}}(X,Y)=X+Y+\sum_{i,j\geqq 1}c_{ij}(\boldsymbol{\omega})X^iY^j$$

について述べる. ここで，$c_{ij}(\boldsymbol{\omega})$ は,

$$c_{11}(\boldsymbol{\omega}) = \frac{S_r''(0,\boldsymbol{\omega})}{S_r'(0,\boldsymbol{\omega})^2},$$
$$c_{12}(\boldsymbol{\omega}) = c_{21}(\boldsymbol{\omega}) = \frac{S_r'''(0,\boldsymbol{\omega})S_r'(0,\boldsymbol{\omega})-S_r''(0,\boldsymbol{\omega})^2}{2S_r'(0,\boldsymbol{\omega})^4}$$

のように決まっていく．実際，$F(x)$ が $F(0)=0$, $F'(0)\neq 0$ となる解析関数なら，x, y が 0 の近傍において

$$F(x+y) = \Phi_F(F(x), F(y))$$

となる

$$\Phi_F(X,Y) = X+Y+\sum_{i,j\geqq 1} c_{ij}(F)X^iY^j$$

が存在して

$$c_{11}(F) = \frac{F''(0)}{F'(0)^2},$$
$$c_{12}(F) = c_{21}(F) = \frac{F'''(0)F'(0)-F''(0)^2}{2F'(0)^4}$$

となることは簡単な計算を

$$\Phi_F(X,Y) = F(F^{-1}(X)+F^{-1}(Y))$$

に対して行なうことによってわかる．$\Phi_F(X,Y)$ は形式群とも呼ばれる．

例 $S_1(x,\omega)=2\sin\left(\frac{\pi x}{\omega}\right)$ のときは

$$S_1(x+y,\omega) = S_1(x,\omega)\sqrt{1-\frac{S_1(y,\omega)^2}{4}}+S_1(y,\omega)\sqrt{1-\frac{S_1(x,\omega)^2}{4}}$$

より

$$\Phi_\omega(X,Y) = X\sqrt{1-\frac{Y^2}{4}}+Y\sqrt{1-\frac{X^2}{4}}$$
$$= X+Y-\frac{1}{8}XY^2-\frac{1}{8}X^2Y+\cdots$$

であるから

$$c_{11}(\omega)=0, \quad c_{12}(\omega)=c_{21}(\omega)=-\frac{1}{8}.$$

▯

次の定理は，$S_2(x,(\omega_1,\omega_2))$ に対する

$$\Phi_{(\omega_1,\omega_2)}(X,Y)=X+Y+c_{11}(\omega_1,\omega_2)XY \\ +c_{12}(\omega_1,\omega_2)XY^2+c_{21}(\omega_1,\omega_2)X^2Y+\cdots$$

の最初の非自明係数 $c_{11}(\omega_1,\omega_2)$ に関する結果である．

定理 6.7.1

(1)　$$c_{11}(\omega_1,\omega_2)=\frac{\sqrt{\omega_1\omega_2}}{\pi}\operatorname{Cot}_2(\omega_1,(\omega_1,\omega_2)) \\ =\frac{\sqrt{\omega_1\omega_2}}{\pi}\operatorname{Cot}_2(\omega_2,(\omega_1,\omega_2)).$$

(2)　$\mathrm{Im}(\tau)>0$ のとき

$$c_{11}(1,\tau)=\frac{2i}{\sqrt{\tau}}\left(E_1\left(-\frac{1}{\tau}\right)-\tau E_1(\tau)\right).$$

(3)　互いに素な自然数 $M,N\geqq 1$ に対して

$$c_{11}(M,N)=-\frac{1}{\sqrt{MN}}\sum_{\substack{m=0,\cdots,M-1\\ n=0,\cdots,N-1\\ (m,n)\neq(0,0)}}\left|\frac{m}{M}-\frac{n}{N}\right|\cot\left(\pi\left|\frac{m}{M}-\frac{n}{N}\right|\right) \\ -\frac{1}{\pi\sqrt{MN}}.$$

▯

［証明］

(1)

$$c_{11}(\omega_1,\omega_2)=\frac{S_2''(0,(\omega_1,\omega_2))}{S_2'(0,(\omega_1,\omega_2))^2}$$

を計算する．定理 6.1.3(1) より

$$S_2'(0,(\omega_1,\omega_2))=\frac{2\pi}{\sqrt{\omega_1\omega_2}}$$

であることを使うと

$$c_{11}(\omega_1,\omega_2)=\frac{\omega_1\omega_2}{4\pi^2}S_2''(0,(\omega_1,\omega_2))$$

となる．次に，定理 6.2.2 の証明の議論から

$$S_2''(0,(\omega_1,\omega_2))=\frac{4\pi}{\sqrt{\omega_1\omega_2}}\operatorname{Cot}_2(\omega_2,(\omega_1,\omega_2))$$

となる．実際，

$$\operatorname{Cot}_2(\omega_2,(\omega_1,\omega_2))=\frac{S_2'(\omega_2,(\omega_1,\omega_2))}{S_2(\omega_2,(\omega_1,\omega_2))}$$

に定理 6.1.3(2)

$$S_2(\omega_2,(\omega_1,\omega_2))=\sqrt{\frac{\omega_1}{\omega_2}}$$

を用いると

$$S_2'(\omega_2,(\omega_1,\omega_2))=\sqrt{\frac{\omega_1}{\omega_2}}\operatorname{Cot}_2(\omega_2,(\omega_1,\omega_2))$$

となり，周期性(定理 5.3.1)の等式

$$S_2(x,(\omega_1,\omega_2))=S_2(x+\omega_2,(\omega_1,\omega_2))S_1(x,\omega_1)$$

において，x について 2 回微分して $x=0$ とすると

$$\begin{aligned}S_2''(0,(\omega_1,\omega_2))&=2S_2'(\omega_2,(\omega_1,\omega_2))S_1'(0,\omega_1)\\&=\frac{4\pi}{\omega_1}S_2'(\omega_2,(\omega_1,\omega_2))\end{aligned}$$

となるので

$$S_2''(0,(\omega_1,\omega_2))=\frac{4\pi}{\sqrt{\omega_1\omega_2}}\operatorname{Cot}_2(\omega_2,(\omega_1,\omega_2))$$

を得る．よって，

$$c_{11}(\omega_1,\omega_2)=\frac{\sqrt{\omega_1\omega_2}}{\pi}\operatorname{Cot}_2(\omega_2,(\omega_1,\omega_2))$$

となる．さらに，等式

$$\operatorname{Cot}_2(\omega_1,(\omega_1,\omega_2))=\operatorname{Cot}_2(\omega_2,(\omega_1,\omega_2))$$

は定理 6.4.1 の証明において示した通りである．

(2)　(1)より

$$c_{11}(1,\tau)=\frac{\sqrt{\tau}}{\pi}\operatorname{Cot}_2(\tau,(1,\tau))$$

であるので，定理6.2.2(1)を用いて

$$c_{11}(1,\tau)=\frac{2i}{\sqrt{\tau}}\left(E_1\left(-\frac{1}{\tau}\right)-\tau E_1(\tau)\right)$$

を得る．

(3)　(1)より

$$c_{11}(M,N)=\frac{\sqrt{MN}}{\pi}\operatorname{Cot}_2(M,(M,N))$$

であるから，定理6.4.1を用いれば，$c_{11}(M,N)$ の表示式を得る．

[証明終]

発展問題　$\tau\in\mathbb{C}-(-\infty,0]$ に対して，関係式

$$c_{12}(1,\tau)=c_{21}(1,\tau)=-\frac{1}{8}c_{11}(1,\tau)^2-\frac{1}{16}\left(\tau+\frac{1}{\tau}\right)$$

を証明せよ．

ヒント　必要に応じて次の文献を参照せよ：

S. Koyama and N. Kurokawa, "Formal group laws for multiple sine functions and applications", *Kodai Math. J.*, **36** (2013), 109–118.

6.8　負位数の多重三角関数

負位数の多重ガンマ関数は§3.8において考察した．それは，定理3.8.1により

$$\begin{aligned}\Gamma_{-r}(x,(\omega_1,\cdots,\omega_r))&=\prod_{n_1,\cdots,n_r=0,1}(x+n_1\omega_1+\cdots+n_r\omega_r)^{(-1)^{n_1+\cdots+n_r+1}}\\&=\prod_{I\subset\{1,\cdots,r\}}(x+\omega_I)^{(-1)^{|I|+1}}\end{aligned}$$

と明示的に求まっていた．ここで，

$$\omega_I=\sum_{i\in I}\omega_i$$

である．本節では，負位数の多重三角関数を

$$S_{-r}(x,(\omega_1,\cdots,\omega_r))$$
$$=\Gamma_{-r}(x,(\omega_1,\cdots,\omega_r))^{-1}\Gamma_{-r}(-\omega_1-\cdots-\omega_r-x,(\omega_1,\cdots,\omega_r))^{(-1)^r}$$

と構成する．より一般に，§3.9 の重み付き多重ガンマ関数

$$\Gamma_r^{\boldsymbol{\alpha}}(x,\boldsymbol{\omega})=\Gamma_r^{(\alpha_1,\cdots,\alpha_r)}(x,(\omega_1,\cdots,\omega_r))$$

に対しては，重み付き多重三角関数を

$$S_r^{\boldsymbol{\alpha}}(x,\boldsymbol{\omega})=\Gamma_r^{\boldsymbol{\alpha}}(x,\boldsymbol{\omega})^{-1}\Gamma_r^{\boldsymbol{\alpha}}(\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\omega}-x,\boldsymbol{\omega})^{(-1)^{|\boldsymbol{\alpha}|}}$$

と構成する．とくに

$$S_{-r}(x,\boldsymbol{\omega})=S_r^{(-1,\cdots,-1)}(x,(\omega_1,\cdots,\omega_r))$$

である．

次の定理は負位数多重三角関数が 1 となることを示している．それは，第 9 章で示される通り，絶対ゼータ関数の関数等式の言い換えとなっている．

定理 6.8.1　$r\geqq 1$ に対して

$$S_{-r}(x,(\omega_1,\cdots,\omega_r))=1.$$

□

［証明］　定義式

$$S_{-r}(x,\boldsymbol{\omega})=\Gamma_{-r}(x,\boldsymbol{\omega})^{-1}\Gamma_{-r}(-|\boldsymbol{\omega}|-x,\boldsymbol{\omega})^{(-1)^r}$$

に負位数ガンマ関数の明示公式(定理 3.8.1)

$$\Gamma_{-r}(x,\boldsymbol{\omega})=\prod_{I\subset\{1,\cdots,r\}}(x+\omega_I)^{(-1)^{|I|+1}}$$

を用いる．まず

$$\Gamma_{-r}(x,\boldsymbol{\omega})^{-1}=\prod_{I\subset\{1,\cdots,r\}}(x+\omega_I)^{(-1)^{|I|}}$$

となる．一方，

$$\Gamma_{-r}(-|\boldsymbol{\omega}|-x,\boldsymbol{\omega})^{(-1)^r}=\prod_{I\subset\{1,\cdots,r\}}(-|\boldsymbol{\omega}|-x+\omega_I,\boldsymbol{\omega})^{(-1)^{|I|+1+r}}$$

において，I の補集合を J とすると

$$\begin{cases}|\boldsymbol{\omega}|-\omega_I=\omega_J,\\ |I|=r-|J|\end{cases}$$

であるから

$$\Gamma_{-r}(-|\boldsymbol{\omega}|-x,\boldsymbol{\omega})^{(-1)^r}=\prod_{J\subset\{1,\cdots,r\}}(-x-\omega_J,\boldsymbol{\omega})^{(-1)^{|J|+1}}$$

となるが

$$\sum_{J\subset\{1,\cdots,r\}}(-1)^{|J|}=0$$

あるいは

$$\sum_{J\subset\{1,\cdots,r\}}|J|=2^r$$

を用いることにより

$$\begin{aligned}\Gamma_{-r}(-|\boldsymbol{\omega}|-x,\boldsymbol{\omega})^{(-1)^r}&=\prod_{J\subset\{1,\cdots,r\}}(x+\omega_J,\boldsymbol{\omega})^{(-1)^{|J|+1}}\\&=\prod_{I\subset\{1,\cdots,r\}}(x+\omega_I,\boldsymbol{\omega})^{(-1)^{|I|+1}}\end{aligned}$$

となる．したがって

$$S_{-r}(x,\boldsymbol{\omega})=1$$

である．　[証明終]

例

(1)

$$\Gamma_{-1}(x,\boldsymbol{\omega})=\frac{x+\omega}{x},$$

$$\Gamma_{-1}(-\omega-x,\omega)=\frac{-x}{-x-\omega}=\frac{x}{x+\omega}$$

であり

$$\begin{aligned}S_{-1}(x,\omega)&=\Gamma_{-1}(x,\omega)^{-1}\Gamma_{-1}(-\omega-x,\omega)^{-1}\\&=\frac{x}{x+\omega}\cdot\frac{x+\omega}{x}\\&=1.\end{aligned}$$

(2)

$$\Gamma_{-2}(x,(\omega_1,\omega_2))=\frac{(x+\omega_1)(x+\omega_2)}{x(x+\omega_1+\omega_2)},$$

$$\begin{aligned}\Gamma_{-2}(-\omega_1-\omega_2-x,(\omega_1,\omega_2))&=\frac{(-\omega_2-x)(-\omega_1-x)}{(-\omega_1-\omega_2-x)(-x)}\\&=\frac{(\omega_2+x)(\omega_1+x)}{(\omega_1+\omega_2+x)x}\end{aligned}$$

であり

$$\begin{aligned}S_{-2}(x,(\omega_1,\omega_2))&=\Gamma_{-2}(x,(\omega_1,\omega_2))^{-1}\Gamma_{-2}(-\omega_1-\omega_2-x,(\omega_1,\omega_2))\\&=\frac{x(x+\omega_1+\omega_2)}{(x+\omega_1)(x+\omega_2)}\cdot\frac{(\omega_2+x)(\omega_1+x)}{(\omega_1+\omega_2+x)x}\\&=1.\end{aligned}$$

$\square$

索　引

ハ 行

マ 行

ヤ 行

ラ 行

ワ 行

黒川信重
1952年生まれ
1975年東京工業大学理学部数学科卒業
現在　東京工業大学大学院理工学研究科教授
専攻　数論

現代三角関数論

2013年11月7日　第1刷発行

著　者　黒川信重（くろかわのぶしげ）

発行者　岡本　厚

発行所　株式会社 岩波書店
〒101-8002 東京都千代田区一ツ橋 2-5-5
電話案内 03-5210-4000
http://www.iwanami.co.jp/

印刷・法令印刷　カバー・半七印刷　製本・牧製本

ISBN 978-4-00-005327-3　　Printed in Japan